

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

47e jaargang
1971/1972
no 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Het Dienes-groepen project

BART VAN DER KROGT

Amsterdam

0 Inleiding

Overdenking van de sinds 1968 in gang zijnde ontwikkelingen wat betreft de modernisering van het wiskunde-onderwijs leidde tot de gedachte dat het belangrijk zou kunnen zijn om naast de modernisering van de leerstof ook aandacht te schenken aan de verbetering van de didaktische presentatie van die leerstof — en wel onder gebruikmaking van resultaten verkregen bij psychologisch-didaktisch onderzoek.

Een van de centrale didaktische problemen is de vraag hoe je het beste een leergang kunt opbouwen waarin een bepaald wiskundig begrip wordt geleerd.

De door prof. Dienes, hoogleraar in de psycho-mathematiek aan de universiteit van Sherbrooke (Canada), ontwikkelde ideeën en de door hem en zijn medewerkers gedane experimenten leken mij belangrijk genoeg om in een normale klasse-situatie te toetsen.

Door de steun van de Stichting Voor onderzoek van het Onderwijs en van prof. dr. J. Koning, direkteur van de afdeling leraarsopleiding van het Pedagogisch Didaktisch Instituut van de Universiteit van Amsterdam werd het mogelijk om een projekt op te zetten binnen de afdeling leraarsopleiding van de Universiteit van Amsterdam.
Door de medewerking van de schoolleiding van het Ignatiuscollege te Amsterdam was het mogelijk om in een brugklas te bestuderen hoe brugklassers VWO — HAVO te werk gaan bij het leren van het wiskundige begrip groep.

Hieronder volgt de beschrijving van de opbouw van de bij het onderzoek gebruikte leergang.
Publikatie van allerlei andere aspekten van het projekt, zoals de toegepaste didaktische werkvorm in de experimentele klas, de wijze waarop gegevens verzameld zijn over het leerproces van de in tweetallen werkende leerlingen, de achtergronden van de op werk van Dienes geïnspireerde opbouw van de leergang, enz. moeten tot na de beëindiging van het projekt (begin 1973) wachten.

1 De inhoud van de leergang

Als leerstof voor de leergang zijn gekozen de eindige groepen C2, C4, K4 en D4.

Later in de leergang werd daar nog aan toegevoegd de groep A4 (met als belangrijk model de draaiingen van een regelmatig viervlak).

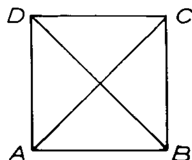
Het volgend overzicht van de inhoud van de 10 katernen waaruit de leergang is opgebouwd geeft een eerste indruk:

Serie I	Modellen van C2, C4, K4 en D4. De elementen zijn bewegingen van personen in geschikte veelhoeken.
Serie II	Modellen van C2, C4, K4 en D4. De elementen zijn vorm/kleur-veranderingsregels van logiblokken.
Serie III	Vertalen van de modellen van serie I in die van serie II via 'woordenlijsten'
Serie IV	Modellen van C2,C4, K4 enD4. De elementen zijn verzamelingen 'woorden'. Vergelijking van de modellen van serie I, II en IV via woordenlijsten.
Serie V	Modellen van C2, C4, K4 en D4. De elementen zijn transformaties van veelhoeken. Vergelijking van de modellen van serie I, II, IV en V.
Serie VI	Definitie van een groep via abstraktie van de verschillende modellen in serie I, II, IV en V.
Serie VII	Nadere bestudering van de groepen K4, D4 en A4 door vergelijking van de modellen uit serie II en serie V.
Serie VIII	Bestudering van de orde van een element door invoering van het begrip 'kring'. Samenvoeging van kringen tot een schema van elk van de groepen.
Serie IX	Opbouw van de groepen uit twee voortbrengers.
Serie X	Opstellen van een axiomastelsel van de groepen K4, D4 en A4. Afleiding van eigenschappen uit die axiomastelsels. Interpretatie van die eigenschappen in de modellen.

De volgende meer gedetailleerde uiteenzetting van de opbouw van de leergang aan de hand van één groep zal de lezer een beter inzicht geven in de betekenis van de hierboven gebruikte termen.

2 Serie I

De leerlingen bestuderen de volgende situatie:
Vier leerlingen A, B, C en D staan op de hoekpunten van een vierkant

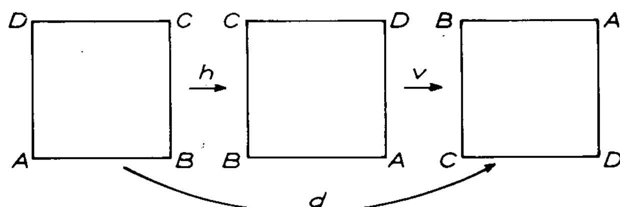


We laten deze leerlingen de volgende vier bewegingen uitvoeren:
h: iedere leerling loopt horizontaal naar het volgende hoekpunt
v: iedere leerling loopt vertikaal naar het volgende hoekpunt
d: iedere leerling loopt diagonaal naar het volgende hoekpunt
b: alle leerlingen blijven staan.

Als *bewerking* wordt gekozen: *na elkaar uitvoeren*

Vergelijking van beginstand en eindstand van elk van de leerlingen in bijv. de volgende situatie levert als resultaat

$$h \text{ dan } v = d$$



In dit model wordt dan nog de neutrale beweging ingevoerd, gevolgd door inverse beweging.

3 Serie II

In Serie II wordt gewerkt aan situaties waarbij op eigenschappen van blokjes regels worden toegepast die hun kleur en/of vorm veranderen.

Voor het te bespreken model werken de leerlingen met de volgende blokjes:
een rood en een blauw vierkant
een rode en een blauwe driehoek.

Als regels kiezen we:

Regel JAN: de rode driehoek wordt een blauwe driehoek
de blauwe driehoek wordt een rode driehoek
het rode vierkant wordt een blauw vierkant
het blauwe vierkant wordt een rood vierkant

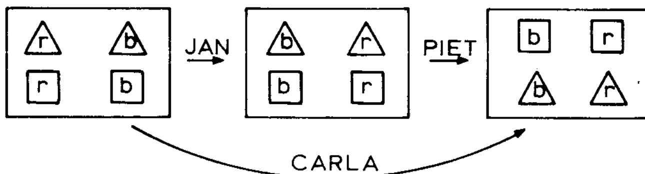
Regel PIET: de rode driehoek wordt een rood vierkant
de blauwe driehoek wordt een blauw vierkant
het rode vierkant wordt een rode driehoek
het blauwe vierkant wordt een blauwe driehoek.

Regel CARLA: de rode driehoek wordt een blauw vierkant
de blauwe driehoek wordt een rood vierkant
het rode vierkant wordt een blauwe driehoek
het blauwe vierkant wordt een rode driehoek

Regel NICO: De vormen blijven hetzelfde.
De kleuren blijven hetzelfde.

Als bewerking wordt gekozen: *na elkaar toepassen.*

Vergelijking van de eerste en de laatste blokjes in bijv. de volgende situatie



levert als resultaat: J dan $P = C$

In dit model worden dan nog de neutrale en de inverse regel ingevoerd, benevens het begrip gesloten verzameling.

Er moet op gewezen worden dat alle begripsvorming in serie I en II plaatsvindt door bestudering van de konkrete situatie zoals die daar geschapen wordt.

4 Serie III

In Serie III wordt een eerste poging gewaagd om de gemeenschappelijke trekken in de twee modellen in serie I en serie II naar voren te halen. De leerlingen moeten hier alle ware zinnen zoals

h dan $v = d$ en J dan $P = C$

uit de twee modellen gaan vergelijken.

(Al die ware zinnen zijn inmiddels overzichtelijk opgeborgen in tabellen)

De verwantschap, die in dit stadium al door de leerlingen aangevoeld wordt moet zichtbaar gemaakt worden in een *woordenlijst* waarmee elke ware zin uit

het eerste model vertaald kan worden in een ware zin in het tweede model.
Eén van die geschikte woordenlijsten is de volgende:

$$h \longrightarrow J$$
$$v \longrightarrow P$$
$$d \longrightarrow C$$
$$b \longrightarrow N$$

Via de opstelling van die woordenlijsten moet de leerling zich langzamerhand bewust worden van wat gemeenschappelijk is in de verschillende modellen en wat niet. Het zal duidelijk zijn dat dit uit moet monden in een bewustzijn van wat wezenlijk is voor het te leren begrip groep en wat 'toevallig' is in dat model. Het proces van scheiding van wat wezenlijk is en wat toevallig, moet zo op gang komen: het *abstraktieproces*.

5 Serie IV

In Serie IV wordt een derde model geintroduceerd.
Het materiaal bestaat uit verzamelingen van woorden die volgens bepaalde regels dezelfde betekenis hebben.
Er worden woorden gevormd met alleen de letters a en b.
De volgende regels bepalen wanneer twee woorden dezelfde betekenis hebben:

Regel 1 : Een woord verandert niet van betekenis als je twee naast elkaar staande letters aa of bb weglaat of toevoegt.

Regel 2 : Een woord verandert niet van betekenis als je twee naast elkaar staande letters a en b verwisselt.

Na enige verkenningen ontdekken de leerlingen dat er sprake is van vier verzamelingen woorden:

A = { a, aaa, bab,---------}
B = { b, aab, bbb, --------}
AB = { ab, abbb, aaab,------}
AA = { leeg woord, aa, baba,--}

Via het aan elkaar plakken van woorden uit de verzamelingen wordt een bewerking gedefinieerd op de verzamelingen *A*, *B*, *AB* en *AA*.
Zo leiden de voorbeelden:

b en abbb = bab
aab en ab = a

tot de volgende definitie: *B* en *AB* = *A*

Na een voorbereiding in serie II wordt nu vastgesteld dat in alle modellen de verzamelingen gesloten zijn onder de gekozen bewerking.
Ook in serie IV worden de begrippen neutrale verzameling en inverse verzameling ingevoerd.

Na de bestudering van dit woordenmodel moeten de leerlingen gaan zoeken welke modellen in serie I en serie II lijken op dit model.
Ook nu doen zij dit weer door woordenlijsten te ontwerpen, waarmee alle ware zinnen uit het ene model vertaald kunnen worden in ware zinnen van het andere model.
Het blijkt dat dit proces van vergelijken van modellen door vele leerlingen niet makkelijk gevonden wordt. De moeilijkheidsgraad van dit vergelijken komt het duidelijkste aan het licht bij dit model met vier elementen, omdat naast dit model nog andere modellen met vier elementen in de leergang zijn opgenomen die niet vergelijkbaar zijn met de hier besprokene.

6 Serie V

In Serie V komen de transformaties van een rechthoek als model ter sprake. De standen van de rechthoek worden vastgelegd door op voor- en achterkant een figuurtje te tekenen.

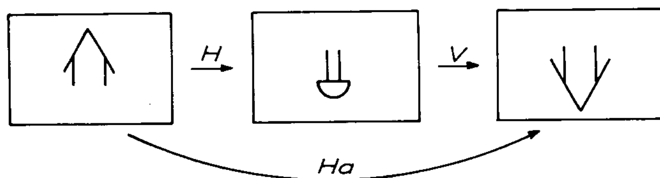
De volgende transformaties worden door de leerlingen verkend:

H: wenteling om de horizontale as
V: wenteling om de vertikale as
Ha: halve draai om het middelpunt
He: hele draai om het middelpunt.

Als bewerking wordt geintroduceerd *het na elkaar uitvoeren.*

Door de transformaties op rechthoeken uit te voeren en begin- en eindstand te vergelijken leren de leerlingen de transformaties samenstellen.

Hieronder een voorbeeld:



dus: H dan $V = Ha$

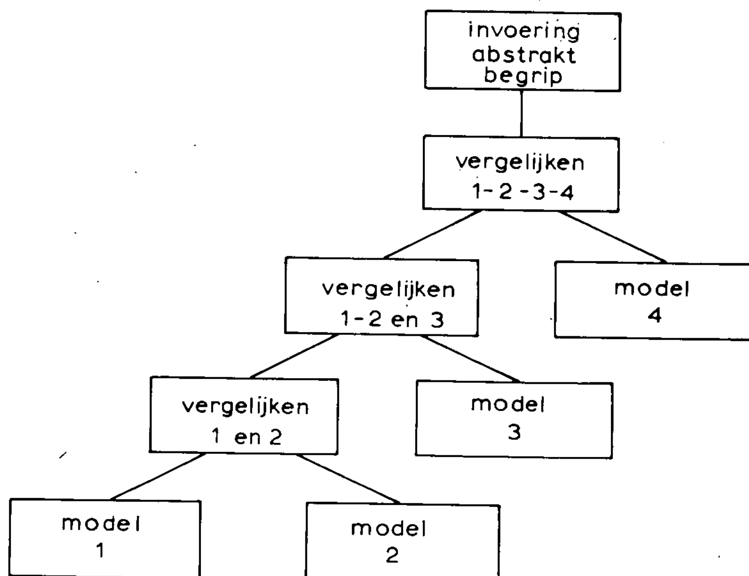
Ook in dit model worden de begrippen gesloten verzameling, neutrale transformatie en inverse transformatie ingevoerd.

Als de leerlingen met het model vertrouwd zijn moeten ze dit vierde model weer gaan vergelijken met de modellen uit serie I, II en IV.

7 Serie VI

In serie VI worden de ervaringen opgedaan in de series I, II, IV en V systematisch gerangschikt.
Hier worden vanuit het overzicht van vergelijkbare situaties in de voorgaande series de begrippen: *gesloten verzameling*
neutraal element
invers element
ingevoerd.
Na enige aandacht voor de associativiteit van bewerkingen is de weg dan gebaand voor de invoering van het begrip groep, in dit geval de viergroep van Klein.

Met deze serie VI wordt het belangrijkste stuk van de leergang afgesloten. Dit stuk wordt gekenmerkt door de opeenvolgende bestudering van vier konkrete situaties die dezelfde struktuur hebben. Via vertaalprocessen met 'goede' woordenlijsten van de verschillende modellen in elkaar worden de leerlingen vertrouwd gemaakt met de gedachte, dat we hier te maken hebben met situaties die in wezen dezelfde zijn.
Zij hebben het wezenlijke leren scheiden van het bijkomstige — zij hebben leren abstraheren en zich door dit abstraktieproces het begrip *groep* eigen gemaakt.
Het volgende overzicht vat de opbouw van dit deel van de leergang nog eens samen.

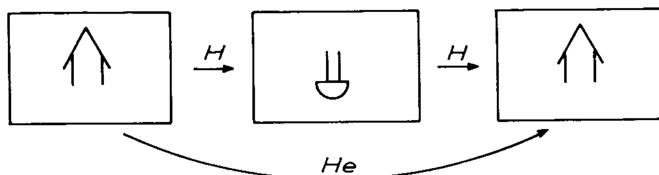


8 Serie VII

In serie VII wordt nog eens het vorm/kleur-model van de blokjes vergeleken met het transformatie-model van de rechthoek.
Deze twee modellen dienen in serie VIII, IX en X als 'drager' voor verdere abstraktiestappen en uitstapjes naar hogere wiskundige sferen.

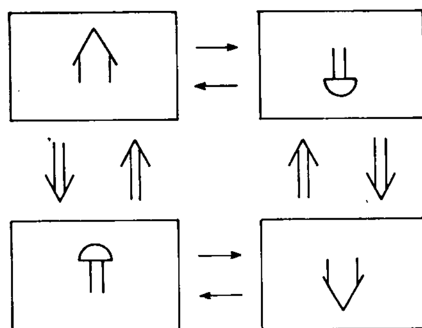
9 Serie VIII

In Serie VIII wordt eerst het effekt bekeken van het meermalen na elkaar uitvoeren van een regel of transformatie. Zo wordt het begrip *kring* ingevoerd. In het geval van de bovenbesproken viergroep van Klein is er alleen maar sprake van tweekringen en eenkringen, bijv. de volgende:

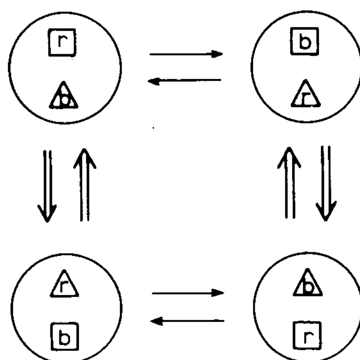


Omdat *H* — *H* = *He* brengt *H* een tweekring voort.

Het blijkt dat bijv. de elementen *H* en *V* de hele transformatiegroep van de rechthoek voortbrengen. In schemavorm komt dat er dan zo uit te zien (⟶ stelt *H* voor en ⟹ stelt *V* voor)



In het blokjesmodel ontstaat precies hetzelfde schema met alleen op de plaats van de standen van de rechthoek nu de blokjes van het vorm/kleur-regelmodel.



⟶ stelt de kleurveranderingsregel voor
⟹ stelt de vormveranderingsregel voor.

De leerlingen maken verschillende schema's met telkens andere standen van de rechthoek en blokjes. Ook wordt de keuze van de voortbrengers (voorgesteld door ⟶ en ⟹) gevarieerd.

Door dit maken van schema's worden de leerlingen er zich nog eens op een andere manier van bewust, dat zij te maken hebben met twee modellen van dezelfde groep.

10 Serie IX

In Serie IX wordt elk element van het transformatiemodel en elk element van het vorm/kleur-regel-model geschreven als een kombinatie van de gekozen voortbrengende elementen. Als dat gebeurd is dringt zich vanzelf nog een manier op om een geschikte woordenlijst te maken waarmee je het ene model in het andere model kunt vertalen.

Zo'n woordenlijst van de twee modellen van de viergroep van Klein ziet er dan als volgt uit

transformatiemodel		
H	⟶	V
V	⟶	K
$H * H$	⟶	$V * V$
$H * V$	⟶	$V * K$

In het transformatiemodel stellen H en V resp. voor wenteling om de horizontale as en wenteling om de vertikale as.
In de vorm/kleur-regel-model stelt V een vormverandering voor en K een kleurverandering.
Door behalve vertalingen vanuit de volledige tabellen en vanuit de schema's van de twee modellen ook nog eens woordenlijsten op te stellen, waarbij alle elementen van elk model geschreven worden als kombinaties van twee voortbrengers, worden de leerlingen langs drie wegen bewust gemaakt van het feit dat zij te maken hebben met twee voorbeelden van dezelfde groep.

Deze benadering langs verschillende wegen heeft niet alleen een didaktische betekenis maar ook een wiskundige. Het is namelijk voor groepen met meer elementen, zoals:
de groep D4 van de acht transformaties van een vierkant en de groep A4 van de 12 draaiingen van een regelmatig viervlak,
een tijdrovende zaak om goede woordenlijsten 'in den blinde' met alle elementen van de groep op te stellen.
Zodra eenmaal alle elementen als kombinatie geschreven zijn van de voortbrengers van de groep is het opstellen van een goede woordenlijst een eenvoudige zaak.

11 Serie X

In Serie X worden allerlei eigenschappen van de viergroep van Klein uit de schema's afgelezen. Uit deze kollektie eigenschappen worden er een paar eenvoudige gelicht, die dan dienst doen als axioma's, die de viergroep van Klein karakteriseren.

Een geschikt drietal axioma's is bijv. het volgende:

a. $\rightarrow \rightarrow = n$
b. $\Rightarrow \Rightarrow = n$
c. $\rightarrow \Rightarrow = \Rightarrow \rightarrow$

(n stelt hierbij het neutrale element van de groep voor).
Doordat de leerlingen deze axioma's uit de vele gemaakte schema's afleiden, is het hun duidelijk dat $\rightarrow$ en $\Rightarrow$ zowel binnen één model als bij de verschillende modellen meerdere betekenissen kunnen hebben.
De symbolen $\rightarrow$ en $\Rightarrow$ staan nu dus voor meerdere verschillend soortige wiskundige objekten.
Vanuit dit axiomastelsel leren de brugklassers nu om eigenschappen af te leiden.

Hiervan het volgende voorbeeld:

Te bewijzen: $\rightarrow \Rightarrow \rightarrow \Rightarrow = n$

Bewijs:	$\rightarrow \Rightarrow$	$= \Rightarrow \rightarrow$	(axioma c)
	$\rightarrow \Rightarrow \rightarrow$	$= \Rightarrow \rightarrow \rightarrow$	($\rightarrow$ toegevoegd)
	$\rightarrow \Rightarrow \rightarrow$	$= \Rightarrow$	(axioma a)
	$\rightarrow \Rightarrow \rightarrow \Rightarrow$	$= \Rightarrow \Rightarrow$	($\Rightarrow$ toegevoegd)
	$\rightarrow \Rightarrow \rightarrow \Rightarrow$	$= n$	(axioma b)

Tenslotte leren ze de bewezen eigenschap te interpreteren in de modellen waarvan het axiomastelsel is afgeleid.

De hier gegeven beschrijving van de leergang voor de viergroep van Klein vormt slechts een deel van de totale leergang. Uit de globale inhoudsopgave in par. 1 bleek al dat ook nog de groepen C2,C4, D4 en A4 aan de orde komen.
Deze groepen worden op precies dezelfde manier behandeld als de hierboven besproken K4. In elk van de katernen 1 t/m V worden de modellen van C2, C4, K4 en D4 op identieke wijze behandeld.

In serie VII t/m X worden de groepen K4, D4 en A4 in twee modellen op identieke wijze behandeld. Daardoor is het voor de leerlingen mogelijk om in 4 resp. 3 stappen hetzelfde leerproces door te maken.

Eindexamen HAVO Nieuwe Stijl

Op verzoek van docenten werkzaam bij het havo heeft de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde een kleine kommissie ingesteld die de opdracht heeft gekregen een aantal proefexamens havo samen te stellen op basis van het nieuwe examenprogramma dat met ingang van het kursusjaar 1972/73 op alle scholen gevolgd wordt.
Een beperkt aantal scholen leidt in deze kursus nog leerlingen op voor het examen in 1973 volgens het tussenprogramma.
Deze subkommissie biedt u hierbij het resultaat van haar werkzaamheden aan met de volgende overwegingen:

a De wijze van formulering en de gebruikte notatie is in overeenstemming met de adviezen van de Nomenclatuurkommissie, ingesteld door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
De opdracht 'Teken de grafiek van f' houdt voor niet-elementaire functies in:
a onderzoek naar het tekenverloop van f ;
b onderzoek naar het tekenverloop van f' ;
c onderzoek naar horizontale en vertikale asymptoten.
De opdracht 'Teken in één figuur de grafieken van f en g' houdt behalve het bovengenoemde ook het oplossen van de vergelijking $f(x) = g(x)$ in.

b De tijd lijkt nog niet rijp een deel van het examen in de vorm van multiple-choice opgaven te stellen. Er is op dit moment nog te weinig oefenmateriaal voor het havo voorhanden. Eerst dan wanneer op de scholen gedurende het vierde en vijfde leerjaar van het havo voldoende ervaring met deze vorm van toetsing is opgedaan, is het reëel te stellen dat ook op het centraal schriftelijk examen op deze wijze getoetst zou kunnen worden.

c In de periode 1968-1972 was het gebruikelijk jaarlijks in totaal zes opgaven aan de examenkandidaten voor te leggen. Daarbij kwamen twee opgaven uit de algebra, één opgave uit de goniometrie, één opgave uit de stereometrie en twee opgaven uit de analytische meetkunde aan de orde. In het nieuwe leerplan van het havo is de scheiding tussen de verschillende delen van de wiskunde veel minder scherp aan te geven. Het ligt derhalve voor de hand te veronderstellen dat jaarlijks in de nieuwe examenopgaven

een minder vast patroon gevolgd zal worden en dus wat meer variatie aangebracht zal worden. Bij elk schriftelijk examen zullen de onderdelen analyse, meetkunde met vektoren en statistiek/kansrekening zeer waarschijnlijk wel aan de orde gesteld worden.

d De subkommissie heeft enige variatie willen aanbrengen in het aantal van zes vraagstukken, die elk uit 2 of 3 onderdelen bestaan. In elk proefexamen zijn naast de bekende kompositievraagstukken ten minste twee kleinere vragen, meestal van meer theoretische aard en bestaande uit één onderdeel opgenomen.
De subcommissie meent, dat op deze wijze kan worden voorkomen dat het vak wiskunde bij het havo het gevaar loopt te ontaarden in een vraagstukkendressuur.

Een werkgroep, uitgaande van de Pedagogische Centra, heeft in het maandblad Euclides, 43e jaargang, nummer 2, van 1 oktober 1967 een toelichting op het examenprogramma havo gegeven. Daarna heeft de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde in mei 1967 een brochure, getiteld 'Interimrapport met toegevoegde discussienota's, uitgegeven, waarin op blz. 41 e.v. een Discussienota Bovenbouw havo opgenomen is.
Deze laatste publikatie is door de subkommissie bijgewerkt volgens de laatste inzichten en hier en daar wat konkreter geformuleerd. Teneinde elke havo-docent in de gelegenheid te stellen hiervan opnieuw kennis te nemen is hierna deze gewijzigde publikatie opgenomen.[1]

De subkommissie adviseert de docenten bij het havo de beide publikaties van 1967 verder buiten beschouwing te laten en de hierna gewijzigde Diskussienota Bovenbouw havo voorlopig als de meest richtgevende te beschouwen.

De subkommissie zal het op prijs stellen kommentaar en kritiek te mogen ontvangen aan het adres van het IOWO, Tiberdreef 4 te Utrecht.

Namens de CMLW, de subcommissie,

J.N. Bosman,
H. Steur,
B.J. Westerhof.

EXAMEN I

1 Bewijs de eigenschap: $\log x + \log y = \log xy$.
Aan welke voorwaarden moeten x en y voldoen?

2 De funktie f is op het interval $<0, 2\pi>$ gedefinieerd door
$$f(x) = \frac{1 - 2\sin x}{2 + \sin x}$$
a Los op: $f(x) < \frac{4}{3}$

[1]) afgedrukt ná de examens.

b Teken de grafiek van f.

3 Gegeven zijn de punten $A(1, 2)$, $B(3, 1)$ en $C(-1, -2)$.

a Bewijs, dat de lijn l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ de bissektrice is van hoek BAC.

b Bereken de koördinaten van de punten P op l met de eigenschap: $PB \perp PC$.

4 a De produktie van een fabriek bedroeg in

1965	2100 stuks
1966	2400 stuks
1967	2400 stuks
1968	2000 stuks
1969	2600 stuks

b De vervuiling van de lucht boven een bepaalde stad wordt veroorzaakt door:

het verkeer voor	48%
fabrieken voor	30%
huisverwarming voor	16%
andere oorzaken voor	6%

c Het temperatuurverloop op zeker etmaal was

4 uur:	12° Celsius
8 uur:	13.4° Celsius
12 uur:	18.2° Celsius
16 uur:	18.1° Celsius
20 uur:	15.4° Celsius
24 uur:	13.1° Celsius

Kies voor elk van de verzamelingen waarnemingsgetallen onder a, b en c een geschikte methode voor grafische weergave. Verklaar je keuze.

5 Gegeven zijn het vlak V: $2x + y - z = 3$ en de punten $A(3, 1, 0)$ en $B(1, 1, -2)$. Benader de hoek van de lijn AB en het vlak V.

6 Gegeven de verzameling $V = \{(x,y) \mid 2^x + 2^y = 6\}$ en de verzamelingen $W_p = \{(x,y) \mid x + y = p\}$ waarbij $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ en $p \in \mathbb{R}$;

a Bereken de elementen van de verzameling $V \cap W_3$.

b Voor welke $p \in \mathbb{R}$ is $V \cap W_p$ niet leeg?

c Als in V geldt $x < 0$, wat geldt dan in V voor y?

7 Gegeven zijn het vlak V: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

en de punten $A(1, -2, -4)$ en $B(1, 4, 0)$.

a Bewijs dat $A'(0, 1, -3)$ de projektie van A op V is.

b Geef een vektorvoorstelling van de projektie op V van de lijn door A en B.

EXAMEN II

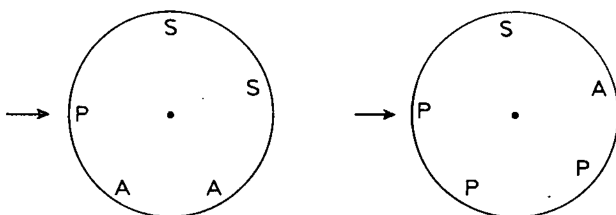
1 Gegeven ΔABC. $\vec{OA} = \underline{a}$. $\vec{OB} = \underline{b}$ en $\vec{OC} = \underline{c}$.
Z is het zwaartepunt van ΔABC.
Bewijs: $\vec{OZ} = \frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$.

2 Gegeven is de relatie $V = \{(x, y) \mid x^y + 1 = 2 + x^y\}$
$x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$.
a Bereken x in geval $y = 1$.

b Bereken y in geval $x = 2$.

c Is V een funktie? Motiveer je antwoord.

3 Een speelmachine heeft twee schijven, die men onafhankelijk van elkaar kan laten draaien. Op beide schijven liggen vijf vruchten regelmatig verdeeld over de omtrek van de schijven. Op de eerste schijf zijn dat twee sinaasappels, twee appels en een peer. Op de tweede schijf zijn dat een sinaasappel, een appel en drie peren.
(zie onderstaande figuur).



Als zo'n schijf uitgedraaid is, wijst hij één van de vijf vruchten aan.
Hoe groot is de kans dat de twee schijven na het draaien
a allebei bij een sinaasappel stoppen?

b allebei bij eenzelfde vrucht stoppen?

c bij verschillende vruchten stoppen?

4 De funktie f met domein $\mathbb{R}^+$ is gedefinieerd door
$f(x) = -x + 2\sqrt{x}$.
a Los op: $f(x) > -3$.

b Teken de grafiek van f op het interval $\langle 0,9 \rangle$.

c De punten $A(1, a)$ en $B(4, b)$ liggen op de grafiek van f.
De raaklijnen in A en B aan de grafiek van f snijden elkaar in S. Bereken de koördinaten van het punt S.

5 Gegeven is de kubus $OABC\,DEFG$, waarbij $O = (0,0,0)$, $A = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$ en $D = (0,0,1)$.
P ligt op het verlengde van CG zó, dat $GP = CG$.
Q is het midden van OA.

a Bewijs, dat de lijnen FQ en AP elkaar kruisen.

b Bereken de afstand van de lijnen FQ en AP.

c Geef een vektorvoorstelling van de lijn door B, die parallel is met het vlak ADC en die de lijn AP snijdt.

6 Van een aantal waarnemingsgetallen is het gemiddelde $\bar{x}$ en de standaarddeviatie s.
Wat gebeurt er met $\bar{x}$ en s als men alle waarnemingsgetallen met 10 vermeerdert?
En wat als men alle waarnemingsgetallen halveert?

7 Een funktie $f: x \to \sin 2x$ heeft als domein het interval $\langle 0, \pi \rangle$.
Geef een volledige afleiding van $f'(\frac{\pi}{2})$, uitgaande van de definitie van afgeleide.

8 Beschouw voor $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ en $p \in \mathbb{Z}$ de relaties

$R_p = \{(x, y) \mid x - y = p\}$,
$S = \{(x, y) \mid y^2 \leqslant 4x + 4\}$
en $T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\}$

a Noem de elementen van de verzameling $R_2 \cap S \cap T$.

b Voor welke p is de verzameling $R_p \cap S \cap T$ niet leeg?

EXAMEN III

1 Gegeven zijn de punten $A(a, a-1)$, $B(2a, a-3)$ en $C(a^2, 4-2a)$, waarbij $a \in \mathbb{R}$.
Voor welke waarde(n) van a liggen A, B en C op één rechte lijn?

2 Gegeven de verzameling $V = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x-2)^2 + (y+3)^2 \leqslant 5 \wedge x - 2y \leqslant 2\}$.

Leid met behulp van een figuur af voor welk element van V de som van x en y zo groot mogelijk is.

3 In een doos zitten 100 kaartjes, aldus genummerd:
00, 01, 02, 03, ..., 10, 11, 12, ..., 99.
Iemand trekt één kaartje uit de doos.
Hoe groot is de kans dat minstens één van de twee cijfers op het kaartje even is?

4 Gegeven zijn de cirkel C: $(x+2)^2 + y^2 = 5$ en de lijnen l: $3x - y = -11$ en

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a Bereken de lengte van het lijnstuk, dat door C van l wordt afgesneden.

b Het beeld van m bij de translatie over de vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}$ is een raaklijn aan C. Bereken a.

5 Teken de grafiek van de relatie waarbij $\{(x, y) \mid (x - 2^y) \cdot ({}^x\log y - 2) = 0\}$
$x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$.

6 Op het interval $[0, \pi]$ zijn de funkties f en g_p gedefiniëerd door $f(x) = \sin x$ en $g_p(x) = p + \cos x$.

a Los op: $f(x) = g_1(x)$.

b Voor welke $p \in \mathbb{R}$ raken de grafieken van f en g_p elkaar?

c Voor welke $p \in \mathbb{R}$ hebben de grafieken van f en g_p geen enkel punt gemeen?

7 Los op: ${}^{\frac{1}{2}}\log x > -1$.

8 Gegeven zijn de vlakken $V: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b-2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b \\ a \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

en $W: x - 2y + z = 4$.

a Voor welke waarden van a en b geldt: $V \mathbin{/\!/} W$?

b Voor welke waarden van a, b en c vallen V en W samen?

EXAMEN IV

1 Gegeven is de kubus $OABCDEFG$, waarbij $O = (0, 0, 0)$, $A = (2, 0, 0)$, $C = (0, 2, 0)$ en $D = (0, 0, 2)$.
P is het midden van AE en Q ligt op het verlengde van OD zó, dat $DR = OD$.

a Bewijs dat het vlak PCQ de vergelijking $x + 4y + 2z = 8$ heeft.

b Bereken de koördinaten van het snijpunt van het vlak PCQ en de ribbe AB van de kubus.

c Bereken de hoek van het vlak PCQ en het grondvlak $OABC$ van de kubus.

2 Gegeven is de funktie $f: x \to \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 3}$ met domein $\mathbb{R}$.

a Onderzoek of de grafiek van f een asymptoot heeft.

b Bereken het bereik van f.

c Bij welke elementen van het bereik van f behoort slechts één element van het domein?

3 Iemand moet op weg naar zijn werk vier verkeerslichten passeren.
Hij heeft door ervaring geleerd dat de volgende kansen bestaan:
de kans op 0 keer rood is gelijk aan 0,05;
de kans op 1 keer rood is gelijk aan 0,25;
de kans op 2 keer rood is gelijk aan 0,36;
de kans op 3 keer rood is gelijk aan 0,26.
Bereken de kans op ten minste twee keer rood licht.

4 De grafiek van de funktie f met domein $\mathbb{R}$ en gedefinieerd door
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + p$
raakt de x-as.
Bereken p.

5 Gegeven de lijn l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en het punt A (1, 2).
Van het parallellogram $ABCD$ liggen B en C op l en ligt D op de y-as.

a Bereken de koördinaten van D.

b Bereken de koördinaten van B en C als bovendien gegeven is dat $ABCD$ een ruit is.

6 De funktie f, gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 2x + a$ voor $x \leqslant 0$ en $f(x) = bx - 3$ voor $x > 0$, is differentieerbaar.
Teken de grafiek van f.

7 Gegeven zijn het vlak V: $2x + y - z = 3$ en de punten A (3, 1, 0) en B (1, 1, − 2). Geef een vektorvoorstelling van de verzameling in V gelegen punten P met de eigenschap: $PA = PB$.

8 Gegeven de volgende frekwentieverdeling:

x_i	92	93	94	95	96	97	98	99
f_i	1	2	5	7	10	10	9	6

Van deze waarnemingsgetallen x_i is het gemiddelde $\bar{x}$.
We verminderen alle getallen x_i met 90 en noemen de uitkomsten y_i

Van de getallen y_i. is het gemiddelde $\bar{y}$.

a Bewijs dat voor de gegeven frekwentieverdeling geldt: $\bar{y} = \bar{x} - 90$.

b Bereken voor de gegeven verdeling de standaarddeviatie.

Gewijzigde diskussienota — Bovenbouw HAVO

1 *Herhaling verzamelingen, relaties en functies.*

Het verband tussen:

verzamelingen	en logica
gelijkheid van twee verzamelingen	en ekwivalentie ($\Leftrightarrow$)
deelverzameling	en implicatie ($\Rightarrow$)
doorsnede	en conjunctie ($\wedge$)
vereniging	en disjunctie ($\vee$)
complement	en negatie ($\neg$)

De relatie van V en W als deelverzameling van $V \times W$;
het domein van een relatie;
het bereik van een relatie;
de grafiek van een relatie.

De functie;
de eerstegraadsfunctie met grafiek;
de tweedegraadsfunctie met grafiek;
eerste- en tweedegraadsvergelijkingen (wortelformule, formules voor som en produkt der wortels) en ongelijkheden.

2 *Rationale functies: differentiaalrekening.*

Differentiequotiënt i.v.m. steilheid en richtingscoëfficiënt.
Het limietbegrip (geen epsilontiek); het differentiaalquotiënt; definitie van het stijgend (dalend) zijn van een functie in een interval (in een punt); stellingen hierover i.v.m. het differentiaalquotiënt.

De afgeleide functie, de begrippen differentieerbaar en continu toegelicht met eenvoudige voorbeelden, het differentiëren van som, verschil, produkt en quotiënt van twee functies; de stelling: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Differentiëren van rationale functies, het berekenen van extreme waarden van rationale functies zonder gebruik te maken van de tweede afgeleide.

Vergelijkingen en ongelijkheden.

De kettingregel.

Grafieken van rationale functies en in verband daarmee: nulpunten, verticale en horizontale asymptoten (geen scheve); uiterste waarden.

Vergelijkingen en ongelijkheden.

3 *Rijen en uitbreiding functies.*

Het begrip rij: $t_n = f(n)$; de rij $t_n = an + b$ en de rij $t_n = ab^n$

Eenvoudige wortelfuncties, eenvoudige wortelvergelijkingen en -ongelijkheden.

De exponentiële functie, het invoeren van 'oneigenlijke machten', grafiek van de exponentiële functie, eenvoudige exponentiële vergelijkingen en ongelijkheden.

De logaritmische functie, grafiek van de logaritmische functie, logaritmentafel en rekenliniaal, berekeningen en logaritmen, enkele eigenschappen van logaritmen, eenvoudige logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden.

4 *Goniometrie.*

De algemene definities van sin α, cos α en tan α, de radiaal als hoekmaat, de formules voor
$\sin(-\alpha)$, $\cos(-\alpha)$ en $\tan(-\alpha)$,
$\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ en $\tan(\alpha \pm \beta)$,
$\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ en $\tan 2\alpha$
De functies sinus, cosinus, tangens met bijbehorende grafiek, uiterste waarden, asymptoten, periodiciteit.

De limieten $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ en $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\tan \alpha}{\alpha} = 1$ en in verband hiermee

voor kleine α: $\sin \alpha \approx \alpha$ en $\tan \alpha \approx \alpha$.
Het differentiëren van goniometrische functies, goniometrische functies met grafieken.

Eenvoudige goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden.

5 *De ruimte*

Herhaling van de grafieken t.o.v. een rechthoekig assenstelsel van de relaties

$$\{(x, y) \mid ax + by + c \gtreqless 0\} \text{ en } \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \gtreqless r^2\}.$$

Berekening van de afstand van twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2).

De translatieformules: $\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$.

De cirkel $\{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$,

de puntenverzamelingen $\{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \gtreqless r^2\}$.

De vergelijkingen van de lijnen door de oorsprong, de vergelijkingen van de lijnen door het punt (x_0, y_0), de vergelijkingen van de lijnen evenwijdig met een der coördinaatassen, de vergelijking van de lijn door twee gegeven punten.

De hoek van twee lijnen, loodrechte stand.

De vergelijking van de raaklijn in een punt van een cirkel.

De verzameling $\{ P | d(P, F) = d(P, l) \}$, waarin F een gegeven punt en l een gegeven lijn is, de begrippen brandpunt en richtlijn, de parabolen $y^2 = 2px$ en $x^2 = 2py$.

Eenvoudige opgaven over puntverzamelingen.

Vectoren in $\mathbf{R}_2$, een basis in $\mathbf{R}_2$, de lengte van een vector, het inwendig produkt van twee vectoren, de hoek van twee vectoren, vectorvoorstelling van een lijn, de normaalvector van een lijn, de afstand van een punt en een lijn.

6 *Afbeeldingen in* $\mathbf{R}_2$

Translatie, spiegeling t.o.v. de x-as, spiegeling t.o.v. de y-as, puntspiegeling t.o.v. O, spiegeling t.o.v. $y = x$ of $y = -x$, rotatie om O over φ, waarbij $\varphi = \frac{1}{2} k\pi$, vermenigvuldiging t.o.v. O met de factor k.

7 *De ruimte* $\mathbf{R}_3$

Onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken.

Hoek van twee lijnen, twee vlakken, lijn en vlak, twee vlakken, twee lijnen.
Berekeningen m.b.v. stelling van Pythagoras, sinus- en cosinusregel.

Kubus, piramide, recht prisma.

Enkele verzamelingen van punten en van lijnen, rechthoekig assenstelsel, aanduiding van punten: (x, y, z), de afstand van twee punten, het midden van een lijnstuk, het vlak.

Vectoren in $\mathbf{R}_3$, vaste vectoren met O als beginpunt, een basis in $\mathbf{R}_3$, de lengte van een vector, het inwendig produkt van twee vectoren, vectorvoorstelling van een punt en een lijn, vectorvoorstelling van een vlak, de normaalvector van een vlak, de hoek van twee vlakken met normaalvectoren, de afstand van een punt en een vlak.

8 *Statistiek en kansrekening.*

a Beschrijvende statistiek: histogram, lijndiagram, cirkeldiagram, klassenindeling, modus, mediaan, gemiddelde, spreiding (ook verkorte methode), standaarddeviatie,
$\langle \bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s \rangle$

Aandacht dient besteed te worden aan het verwerken van en het trekken van conclusies uit gegeven of zelf verzameld statistisch waarnemingsmateriaal.

b Eenvoudige kansrekening: begrip kans, somregel, complementaire kans, onafhankelijkheid van gebeurtenissen, produktregel.

De Eindexamens 1972 — I

Er zijn weer heel wat soorten wiskunde-examenopgaven, die aan de kandidaten werden of zullen worden voorgelegd.
Allereerst vinden hieronder een plaats de schriftelijke examens vwo(athenea en nieuwe gymnasia). We mogen eraan herinneren dat het programma — zowel voor wiskunde-I als voor wiskunde-II — nog een overgangsprogramma is. Niet alle stof die volgend jaar geëxamineerd wordt was voor deze scholen nog geëist. Aan enkele ervan werd echter deelgenomen aan een experiment. Het schriftelijk examen hiervoor (wiskunde-I) verschilde slechts in één opgave van dat aan de andere scholen.
De opgaven voor het oude gymnasium en de hbs drukken we uiteraard niet af, behalve die een afwijkend programma betroffen. Ze zijn alle aangeduid als HBS-examens.
Bij het persklaar maken van dit nummer zijn de schriftelijke havo-examens nog niet afgenomen. De opgaven zullen daarom eerst in het aug.- sept.- nummer kunnen worden afgedrukt.
Daar dit jaar aan alle mavo-scholen het nieuwe examen wordt afgenomen lijkt het ons onnodig om ook de mavo-examen-opgaven op te nemen. Mochten wij ons daarin vergissen, dan zien we gaarne — zeer spoedig — reacties tegemoet.

Wiskunde I — VWO (3 uur)

1 De functies f en g zijn voor elke reële, positieve x gedefinieerd door $f(x) = 4 - x$ en $g(x) = 3 : x$.

a Bereken de tangens van de hoek waaronder de grafieken van f en g elkaar snijden.
b Bereken de oppervlakte van het gesloten vlakdeel V begrensd door de grafieken van f en g.
c Een lijn met vergelijking $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte. Bewijs dat $p > 1\frac{3}{4}$ is zonder gebruik te maken van een logaritmentafel.

2 De functies f en g zijn voor elke reële x gedefinieerd door $f(x) = e^x$ en $g(x) = e^x - ex$.

a Teken in één figuur de grafieken van f en g.
b Een lijn met vergelijking $x = p$ waarbij $p > 0$ is, snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B.
De lijn l raakt de grafiek van f in punt A.
De lijn door punt B, evenwijdig aan de X-as, snijdt de lijn l in punt C.
Bereken de maximale oppervlakte van driehoek ABC.

3 De functies f zijn gegeven door $f(x) = \frac{\cos x}{p + \sin x}$ waarbij $p^2 \neq 1$ is.

a Voor welke waarden van p hebben de bijbehorende functies als uiterste waarde $\frac{4}{3}$?
b Bewijs dat de grafiek van elke functie òf asymptoten loodrecht op de X-as, òf raaklijnen evenwijdig aan de X-as heeft.

4 Een functie f die differentieerbaar is voor elke reële x, is

gegeven door $f(x) = -2x + x \ln x$ voor $x > 1$
en $f(x) = mx + n$ voor $x \leqslant 1$

waarbij m en n constanten zijn.

a Bewijs dat $m = n = -1$.
Teken de grafiek van f.

b De functie f heeft een primitieve functie g die voor $x > 1$ gegeven is door $g(x) = px^2 + qx^2 \ln x$ waarbij p en q constanten zijn.
Bereken p en q.
Welke functie is g voor $x \leqslant 1$?

c Bereken de oppervlakte van het gesloten vlakdeel begrensd door de grafiek van f en de X-as.

Wiskunde II — VWO (3 uur)

1 In een kubus $ABCD \cdot EFGH$ zijn de punten P, Q en R opvolgend de middelpunten van de zijvlakken $ABFE$, $ABCD$ en $EFGH$.

a Bewijs dat de lijnen BH, CP en FQ door één punt gaan.

b Beschouw een kegelvlak waarvan F de top is, lijn FA de as is en lijn FQ een beschrijvende is.
Bewijs dat de lijn BR dit kegelvlak raakt.

2 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven een ellips met vergelijking $x^2 + 2y^2 = 8$.
Op de ellips ligt een punt A en op het lijnstuk OA tussen O en A ligt een variabel punt B.
De poollijn van B ten opzichte van de ellips snijdt de lijn OA in punt C onder een hoek α.
Punt A doorloopt de ellips.

a Bewijs dat $BA < AC$.

b Stel een vergelijking op van de verzameling van de punten B voor het geval dat $BA : AC = 1 : 2$.

c Teken de verzameling van de punten B voor het geval dat $tg\,\alpha = 2\sqrt{2}$.

3 Van een driezijdig prisma $ABC \cdot DEF$ hebben alle ribben de lengte $2p$.
De projectie van D op het grondvlak ABC valt samen met het midden G van de ribbe AC.

a Bewijs dat de lijnen BD en CE elkaar loodrecht kruisen.

b Een bol met middelpunt G gaat door het snijpunt van de lijnen BF en CE.
Druk de straal van de snijcirkel van de bol met vlak BDF uit in p.

c Op de ribbe AC ligt een variabel punt X en op het lijnstuk BD een variabel punt Y zo dat $AX = DY$.
Druk de maximale inhoud van viervlak $ABXY$ uit in p.

4 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven
een stelsel hyperbolen met vergelijking $x^2 - y^2 + p = 0$ waarbij $p \neq 0$ is
en een stelsel parabolen met vergelijking $y^2 - 2qx - 2q^2 = 0$ waarbij $q \neq 0$ is.

a Voor welke waarden van p hebben de bijbehorende hyperbolen van het eerste stelsel vier verschillende punten gemeen met die parabool van het tweede stelsel waarvoor $q = 1$ is?

b Stel een vergelijking op van de verzameling van de punten waarin een hyperbool van het eerste stelsel en een parabool van het tweede stelsel elkaar raken.

Wiskunde I (experiment) VWO (3 uur)

De opgaven 1, 2 en 3 zijn gelijk aan de nummers 1, 2 en 3 van het examen wiskunde I — VWO dat hiervoor is afgedrukt.

4 Een kromme K is gegeven door $x = t \ln t$ en $y = (t-1) \ln t$.

a Bewijs dat K de X-as raakt.

b Op K ligt een variabel punt P dat niet met de oorsprong samenvalt.
Welke waarden kan de richtingscoëfficiënt van de lijn OP aannemen?

c In welk punt heeft K een raaklijn evenwijdig aan de Y-as?
Onderzoek of K een of meer asymptoten heeft.
Teken de kromme K.

Algebra (experiment) – HBS (2½ uur)

1 Een functie f is voor $x < \frac{1}{2}$ gegeven door $f: x \rightarrow (1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

a Teken de grafiek van f.

b Bereken de oppervlakte van het gesloten vlakdeel begrensd door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x+4=0$ en $x+1=0$.

c Bereken de inhoud van het lichaam dat ontstaat door het onder *b* genoemde vlakdeel om de x-as te wentelen.

d Een lijn met richtingscoëfficiënt 1 raakt de grafiek van f in punt A.
Bereken de coördinaten van A.

2 Een functie f is gegeven door $f: x \rightarrow e^{\frac{1}{2} - x^2}$.

a Een lijn raakt de grafiek van f in een punt met x-coördinaat 1.
In welk punt snijdt deze lijn de x-as?

b Voor welke waarden van p gaan door het punt $(p,0)$ twee raaklijnen aan de grafiek van f?

c Bewijs dat de grafiek van f twee buigpunten heeft.
Bereken de tangens van de hoek die de twee buigpuntsraaklijnen aan de grafiek van f met elkaar maken.

3 Gegeven is de differentiaalvergelijking $2y\,e^x\,dy - dx = 0$.

a Los de differentiaalvergelijking op.
Toon aan dat een van de integraalkrommen $y^2 + e^{-x} = 5$ tot vergelijking heeft.

b Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan deze integraalkromme in de snijpunten met de x-as en met de y-as.

c Onderzoek of deze kromme een of meer asymptoten heeft.

d Teken de kromme.

4 Gegeven is de differentiaalvergelijking $dy + f(x)\,y\,dx = f(x)\,dx$.

a Als $y = g(x)$ aan de differentiaalvergelijking voldoet, dan voldoet ook $y = p - g(x)$ waarbij p een constante is.
Bereken p.

Beschouw de verzameling V van de punten (x,y) waarin voor het lijnelement dat aan de differentiaalvergelijking voldoet, geldt $dy = 0$.

b Bewijs dat de lijn $y = 1$ een deelverzameling van V is.

c Als het punt $(2,3)$ tot V behoort, dan is er een tweede lijn die een deelverzameling van V is.
Welke lijn is dat?

Stereometrie (experiment) HBS (2½ uur)

In de vraagstukken 1, 2 en 3 hebben de gegevens betrekking op een positief georiënteerde en orthonormale basis $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ van de ruimte.

1 Op een bol B met vergelijking $(x_1-1)^2+(x_2+1)^2+(x_3-2)^2=9$ liggen de punten $P=(4,-1,2)$, $Q=(1,2,2)$ en $R=(3,1,3)$.

a Bereken de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel die gaat door de punten P, Q en R.

b De vlakken U, V en W raken de bol opvolgend in de punten P, Q en R.
De snijlijn van U en V is l.
Bereken de sinus van de hoek van l en W.

2 Gegeven zijn een vlak V met vergelijking $2x_1+x_3=3$,
een punt A $(0,2,-2)$
en een lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

Een lijn m gaat door A en staat loodrecht op V.

a Stel een vectorvoorstelling op van de verzameling van de in V gelegen punten waardoor lijnen parallel met l getrokken kunnen worden die tevens m snijden.

b Door A gaat een lijn die l snijdt in P en die V snijdt in Q zo dat $d(A;P)=d(A;Q)$.
Bereken de coördinaten van P en Q.

3 Gegeven zijn een vlak U met vergelijking $x_1+px_2+4x_3=2$,
een vlak V met vergelijking $2x_1-x_2-px_3=-1$
en een vlak W met vergelijking $x_1-x_2-px_3=-1$.

a Bewijs dat voor $p=0$ de vlakken U, V en W precies één punt gemeen hebben.

b Voor elke waarden van p hebben de vlakken U, V en W precies één punt gemeen?

c De vlakken U, V en W hebben een lijn s gemeen.
Bereken p en stel een vectorvoorstelling van s op.

4 Gegeven is in R_3 een onafhankelijk stelsel vectoren $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$
De vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ zijn de plaatsvectoren van opvolgend de punten A, B en C.
Het punt M is het midden van het lijnstuk AC.
Van een punt P is de plaatsvector $p\bar{a}$ en van een punt Q is de plaatsvector $q\bar{b}+\bar{c}$.
De lijn k gaat door M en P en de lijn l gaat door B en Q.

a Voor welke waarden van p en q is k parallel met l?

b De lijnen k en l snijden elkaar.
Stel een betrekking op tussen p en q.

Goniometrie en analytische meetkunde (experiment) — HBS (2½ uur)

In de vraagstukken 2 en 3 hebben de gegevens betrekking op een orthonormale basis $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ van het vlak.

1 De functies f en g zijn op het interval $\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant 1\frac{1}{2}\pi$ gedefinieerd door $f(x)=-\frac{1}{2}+\sin^2 x$ en $g(x)=\cos^2 x$.

a Teken in één figuur de grafieken van f en g.

b Bereken de oppervlakte van het gesloten vlakdeel begrensd door de grafieken van f en g.

c Een lijn door het punt $(p,0)$ loodrecht op de X-as, snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B.
De raaklijn in A aan de grafiek van f staat loodrecht op de raaklijn in B aan de grafiek van g.
Bereken p.

2 Gegeven zijn een lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$,
een punt $A = (2, 3)$ op l; en een punt $P = (6, -5)$.

a Een cirkel C_1 gaat door P en raakt l in A.
Stel een vergelijking van C_1 op.

b Een cirkel C_2 gaat door P en A en snijdt van l een koorde af met lengte $2\sqrt{10}$.
Stel een vergelijking van C_2 op.

3 Gegeven zijn de punten $A = (2, 4)$, $B = (8, 10)$ en $P = (6, 4)$.

a Op de drager van $\bar{e}_2$ ligt een punt C zo dat de oppervlakte van driehoek ABC 24 is.
Bereken de coördinaten van C.

b. Van een driehoek ABD is gegeven dat P het snijpunt van de bissectrices is.
Bereken de coördinaten van D.

4 Gegeven is in R_2 een onafhankelijk stelsel vectoren $\{\bar{a}, \bar{b}\}$
De vectoren $\bar{p}$ en $\bar{q}$ zijn gegeven door $\bar{p} = \alpha\,\bar{a} + (2 - \alpha)\,\bar{b}$ en $\bar{q} = \bar{a} + \alpha\,\bar{b}$.

a Voor welke waarden van α is het stelsel $\{\bar{p}, \bar{q}\}$ afhankelijk?

Verder is gegeven dat $\|\,\bar{a}\,\| = 2$, $\|\,\bar{b}\,\| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ en $\varphi\,(a;b) = \frac{1}{6}\pi$.

b Bereken de kleinste waarde van $\|\,\bar{p}\,\|$ als α variabel is.

c De vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{q}$ zijn de plaatsvectoren van opvolgend de punten A, B en Q.
Q ligt op de cirkel met middellijn AB.
Bereken α.

Korrel CLXXXI

Grapje

Onlangs zag ik een hospitant het volgende op het bord produceren:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \begin{cases} \nearrow x = -1 \\ \searrow x = 4 \end{cases}$$

Toen ik hem na afloop van de les zei, dat ik dit ietwat zonderling vond, zei hij: 'Het is inderdaad slordig opgeschreven. Ik had moeten zeggen: uit $x^2 - 3x - 4 = 0$ kan volgen $x = -1$, maar er kan ook uit volgen $x = 4$.'
Thuis gekomen schreef ik het voor de aardigheid eens op:

$$(x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1) \lor (x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4).$$

En wat je nu hierin voor x ook invult, steeds ontstaat er een ware uitspraak.
Knappe hospitant.

P.G.J. Vredenduin
Oosterbeek

Books for science and mathematics teaching in the 1970s

GARETH HOWELL

Head Science Education Section, the British Council

The problem of preparing our children for their future life and roles in society, industry and commerce is not a new one. However, the last two decades have seen enormous changes in the impact of science, mathematics and technology upon society and all our daily lives. Nor is this rate of change in the development of these fields likely to slow down; indeed, all the indications are that it will speed up as the growth in scientific knowledge expands still further. Instead of a relatively steady, slow and predictable development, it is likely that even more revolutionary applications of science and technology will soon affect us all. The problem of educating children through science and mathematics today has thus acquired a new significance and a new depth. It will not be enough to prepare them to cope with today's technology. We must in addition prepare them to manage the technological innovations at least up to the end of the century, and also we must prepare the children for creative roles in the discovery and application of these new technologies.

It is not suprising therefore to find that the whole structure and direction of science and mathematics teaching has undergone a marked change in recent years. The realization of the extent of the changing demands placed upon education through these subjects has influenced the objectives of the school courses. These in turn have influenced the methods of teaching, the content of the courses, and stressed the development of creative thought processes in our children.

The main development trends in Britain can be traced back to the efforts of enlightened science and mathematics teachers, working through their professional teachers associations beginning largely in the late 1950s. The influence of the Association for Science Education (ASE) and the Association of Teachers of Mathematics (ATM) continues to be a significant feature of development work in these fields. The ASE books on *The Teaching of sciene in secondary schools* and *Science and Education: science in the introductory phase* are a notable contribution to the handbooks for teachers now available. Similar publications by the ATM, *Notes on mathematics in primary schools* and *Some lessons in mathematics: a handbook on the teaching of 'Modern' mathematics*, have played a significant role in spreading modern ideas throughout the schools.

*) British Council Feature article.

The effective realization of the acknowledged need for reform in Science teaching required a careful analysis of the new aims and the rewriting of the old courses. The most significant contribution in this field to date has been the work of the Nuffield Science Teaching Project and its publications in Physics, Chemistry and Biology for secondary schools, and in the Nuffield Junior Science books. Recently the Nuffield Advanced Secondary materials in Biology and Chemistry have extended this work up to pre-University level. In mathematics a larger number of projects were embarked upon of which perhaps the most significant publications are those of the Nuffield Mathematics Project for primary schools and the School Mathematics Project (SMP) for secondary schools. The main development work in both these fields is now proceeding largely in the hands of the Schools Council for the Curriculum and Examinations who have surveyed a wide variety of contemporary problems in science and mathematics education. Two of their most significant publications, *Science for the young school leaver* and *Mathematics in Primary Schools* marked the beginning of a new approach to the wider aspects of these subjects. New subject patterns for science teaching are emerging, of which perhaps the most interesting is the teaching of science as an Integrated single subject at secondary level. The most effective Integrated Science scheme so far devised has been that of the Scottish Education Department described in their *Curriculum Paper No.7.* This work has been adapted for use in a number of overseas countries including Malaysia and the West Indies, and is making a significant contribution to the development of science teaching internationally.

It is probably in the present generation of books for pupils and teachers that the effects of the new projects are most clearly seen. No longer is a pupil's textbook a scientific tome concerned only with its subject matter. The Nuffield Science Teaching Project ushered in new patterns for pupils workbooks, background readers, teachers guides and even special audio-visual material to accompany the books. The message has been clearly understood by publishers and other authors who have combined the imaginative use of modern publishing techniques with the new pattern for school books to produce interesting and 'alive' books that are both up to date in content and approach to the subject. There has been an 'explosion' of good new books for science and mathematics teaching in the last few years, stimulated by the work of individual projects. Two of the earlierst series of works of this kind which are still excellent examples of the modern trend are Jim Jardine's *Physics is Fun* and Johnstone and Morrison's *Chemistry takes shape.* These neatly illustrate amongst other things the new emphasis on capturing the interest of the pupils and the use of clearly defined themes to achieve a better understanding of the unity of subject, as in the latter of these two series where structural factors in chemistry are used to link together the various parts of the course. In the field of Mathematics similar approaches have been used and an increasing emphasis has been placed on the relations of mathematics to the environment and everyday life. A good example of this is the series by E J James, *'Mathematical topics for modern schools'.*

In Biology at secondary level and in primary science much greater emphasis is now placed on the relationship between man and his environment and ecological studies. Amongst the wide range of reading material available for primary school children the FF Blackwell series *'Science through Experiments,* is a good example of the trend towards this greater relevance in science studies. The series by RF Morgan, *Environmental Biology,* and M Knight's *Field Work for young naturalists* emphasize the interrelation of organisms, while D G Mackean's *Introduction to Genetics* brings in another theme which plays a prominent role in modern biology teaching.

Many British textbooks have been used overseas, particularly in the English speaking countries of the Commonwealth, for many years. It is good to see the large strides which have been made recently in publishing modern books suitable for use in tropical areas. In biology the tropical edition of the extremely popular book by D G Mackean, written jointly with J Mitchelmore, *Introduction to Biology* is a notable landmark as also, on a slightly different theme, is P T Marshall and D T D Hughes' *Tropical Health Science.* In physics, E H Ward's books, *Senior Physics, Parts 1 & 2,* introduce students to the principles of physics through the local environment of tropical countries.

In applying the lessons learned in curriculum development in Britain to overseas countries, the need for clear descriptions of the principles and operation of curriculum development processes has been clearly realized by the Centre for Curriculum Renewal and Educational Development Overseas (CREDO, now CEDO) in their publication *Modern Curriculum Developments in Britain.* Indeed the reform of science and mathematics teaching has been an international task for some time. The publications of UNESCO, *New Trends,* on teaching these subjects, and similar publications by the Organization for Economic Cooperation and Development (OECD) clearly reveal the value to be gained from international cooperation in this field.

The pace of curriculum development in science and mathematics and the variety of projects and experiments now in progress has necessitated a much greater use of professional journals and periodicals for the exchange of information. Considerable progress has been made in this field recently by the *Journal of Biological Education, Physics Education* and *Education in Chemistry* - published by the Institutes of Biology and Physics and the Royal Institute of Chemistry respectively. In Mathematics the ATM *Mathematics Teaching* is probably the outstanding contributor.

It is impossible to do full justice to the range of material now available in these fields in such a short article and the reader is encouraged to explore further. He will find it a most rewarding experience. The pupils of the 1970s will have before them a range and variety of material unparalleled in the history of mankind.

I.O.W.O.

DEELNAME AAN HET EXPERIMENT COMPUTERKUNDE

In de brief AVO 72-14 van 24 februari 1972 van de minister van onderwijs en wetenschappen worden voorbeeldtabellen voor vwo-havo-mavo gegeven, waarin voor alle leerjaren nog ruimte is opengelaten die naar eigen inzicht door de school kan worden opgevuld, o.a. met het facultatieve leervak computerkunde. Deze scholen, maar ook scholen van het lager en middelbaar beroepsonderwijs, waarin belangstelling voor computerkunde in de cursus 1972-1973 bestaat, worden bij deze uitgenodigd tot deelname aan het experiment, uitgaande van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs. Reacties op deze uitnodiging ontvangen wij graag schriftelijk aan het adres:

I.O.W.O.
Tiberdreef 4
Utrecht.

Nadere informatie over inhoud en uitvoering van dit experiment en de voorwaarden tot deelname vindt u hieronder en kunt u aan bovenstaand adres aanvragen.

Algemene doelstelling van het leervak

Een eerste kennismaking met computers en automatisering zoals deze zich manifesteren in studie, beroep en dagelijks leven. Daarnaast vooral ook het verkrijgen van algoritmische, organisatorische en operationele vaardigheden, die ook buiten de automatisering van groot belang zijn.

Leerstof

De leerstof mondt uit in praktisch werken met vereenvoudigde voorbeelden van werkelijk computergebruik, zoals een girodienst, een personeelsadministratie, plaatsreserveren in vliegtuigen en simulatie van processen.
Daaraan vooraf gaat oefening in het instrueren (programmeren) van machines, waarbij speciaal gelet wordt op het leren onderscheiden en isoleren van routinematigheden en het nauwkeurig beschrijven van processen (algoritmiek), het leren herkennen van hoofdlijnen van structuren (organisatie) en het leren aangeven van een oplossing in ondubbelzinnige opdrachten (operationele vaardigheid). Het bovenstaande kan uitsluitend worden gerealiseerd als elke leerling gedurende de cursus kan beschikken over computerfaciliteiten. De te gebruiken programmeertaal dient geschikt te zijn voor deze leerstof en ontdaan te zijn van moeilijkheden die essentieel zijn in dit licht. De leerstof vereist geen specifieke wiskundige voorkennis van de leerlingen.

Leermiddelen

Bij het experiment kan gebruik gemaakt worden van het leerboekje 'Computerkunde 1 en 2' (uitgave Wolters Noordhoff) en/of het 'Werkschrift Computerkunde' (uitgave IOWO). Dit laatste gericht op leerlingen, die behoefte hebben aan meer oefenmateriaal. In beide wordt gebruik gemaakt van de programmeertaal ECOL (Educational COmputer Language), een eenvoudige probleemgerichte taal.

Docenten

Bij het avo en vwo worden veelal de wiskundedocenten bij het experiment ingeschakeld. Uitgaande van het IOWO zijn voor deze leraren al verscheidene heroriënteringscursussen computerkunde gehouden. Ook in het komende cursusjaar staan weer cursussen op het programma. Mededelingen over deze cursussen voor derde graads leraren zijn al gepubliceerd, voor de overige docenten zullen ze nog volgen. Ter begeleiding van de leraren computerkunde is een docentenboek beschikbaar, verschijnt verder een contactblad met aanwijzingen en nieuws en zijn er tenslotte contactvergaderingen.

Leerlingen

Het computeronderwijs richt zich op leerlingen vanaf 15 jaar, zeker niet uitsluitend de exact begaafden.

Programmaverwerking

Vanaf ongeveer de achtste les wordt van elke leerling verwacht dat hij programma's schrijft (gemiddeld één per twee lesuren) en deze door een computer laat verwerken. Daartoe zijn kaarten ontworpen, waarop met behulp van potloodstreepjes het programma kan worden aangegeven (te vergelijken met de volkstellingkaarten). Deze kaarten kunnen worden opgestuurd, waarna de uitwerkingen in principe binnen een week op de school terugverwacht kunnen worden.

Kosten

Voor rekening van de school of voor de leerling komen, behalve de leerboeken, de kosten van de aanstreepkaarten en de verzendkosten, samen naar schatting f. 0,50 tot f 0,75 per programma.

Overige voorwaarden

Van de deelnemende docenten wordt uiteraard belangstelling voor computerkunde en ook bereidheid tot meewerken aan het ontwikkelen en evalueren van een nieuw leervak en bereidheid tot studie in dit vak verwacht. In verband met de programmaverwerking is deelname het komende cursusjaar nog gelimiteerd. Toelating geschiedt in volgorde van aanmelding.

Utrecht, mei 1972
Instituut Ontwikkeling
Wiskunde Onderwijs
G.A. Vonk

I.O.W.O.

CURSUSSEN VOOR LERAREN

Het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs organiseert in het cursusjaar 1972/'73 de navolgende cursussen voor wiskundeleraren 1e/2e graad:

I. *Meerdaagse cursussen:*

1.1. Topologie (herh.)	6. 7. 8 sep. '72 Utrecht
1.2. Toegepaste Analyse	23.24.25 nov. '72 Utrecht
1.3. Statistiek in Bakens	4. 5. 6 jan. '73 Utrecht
1.4. Economie en wiskunde	8. 9.10 jan. '73 Groningen
1.5. Discrete Wiskunde (herh.)	26.27.28 apr. '73 Eindhoven*

II. *Middagcursussen:*

2.1. Waarschijnlijkh. rekening en Statistiek (12×)	(landelijk gespreid)
2.2. Computerkunde (15×)	aanvang half sep. '72 Utrecht op do. middagen.

*Bij deze cursus hangen de definitieve data af van het congres van het Wiskundig Genootschap.

III. *Middagbijeenkomsten keuzevak wiskunde-II:*

3.1. Complexe getallen	30 okt. '72	& evt.	Utrecht
3.2. Projectieve Meetkunde	30 okt. '72	feb.	
3.3. Topologie	25 okt. '72	'73	Utrecht

Toelichting:

1.1. De cursus Topologie is ingericht ter voorbereiding op het gelijknamige keuzevak, zoals die vermeld staat in het leerprogramma voor Wiskunde-II.
Tijdens de cursus wordt gebruik gemaakt van een Amerikaans boek: Chinn & Steenrod, 'First Concepts of Topologie', dat specifiek voor keuzevak-gebruik vertaald is door Drs. J. van Dormolen. Van de deelnemers wordt verwacht, dat zij dit boek zelf aanschaffen. Dit zal centraal gebeuren via het I.O.W.O. (ca. ƒ 13,50).
1.2. Onderwerpen uit de analyse die in de leerstof van de hogere klassen van v.w.o. voorkomen volgens het nieuwe programma, zullen worden behandeld uit tweeërlei oogpunten:
enerzijds zal de stof 'uit een hoger standpunt' worden bezien, om de leraren een bredere achtergrond te verschaffen, anderzijds zal speciale aandacht worden besteed aan de toepassingen en de toepasbaarheid van de stof, hetgeen in het onderwijs van nut kan zijn om de leerling beter te motiveren. Veel plaats zal worden ingeruimd voor de differentiaalvergelijkingen.
1.3. Het onlangs verschenen dubbelnummer van Euclides (jrg. 47, nr. 7/8) moge een indicatie zijn van datgene wat in deze kursus ter diskussie zal staan. Naast achtergrondcolleges en -practica t.a.v. geboden materie, zal deze cursus ook in het teken staan van de respons met het 'veld' als aangekondigd in het betrokken Euclides-nummer.
(Deelname staat in principe open voor *alle* wiskunde-leraren.)
1.4. In deze kursus worden een aantal eenvoudige economische relaties en modellen behandeld en het principe van het maximeringsgedrag.
1.5. Inhoud: Combinatorische configuraties, zoals orthogonale matrices, blockdesigns, grafen, codes, latijnse vierkanten en coding theory worden besproken met hulpmiddelen uit de Galois-lichamen, vectorruimten over Galois-lichamen en elementaire getaltheorie.
2.1. Formeel is de inschrijving van deze cursus reeds gesloten. Hij zal echter in het cursusjaar 1973/'74 worden herhaald.
2.2. Deze kursus is bestemd voor 1e en 2e graad docenten, niet noodzakelijk in de wiskunde. In vogelvlucht wordt de leerstof behandeld die ook in het voortgezet onderwijs experimenteel wordt gedoceerd, met de bijbehorende didaktische aspekten. Daarna wordt dieper ingegaan op programmeren, apparatuur, programmatuur en datastructuren. Computerverwerking voor kursisten is gratis.

3. Ter begeleiding van de leraren die een der genoemde onderwerpen in keuzevak wiskunde-II behandelen in het seizoen 1972/1973, worden deze bijeenkomsten belegd. In principe zijn de bijeenkomsten bestemd voor uitwisseling van ervaringen, voor het stellen van (achtergrond-) vragen. De auteurs van de betrokken teksten zullen aanwezig zijn.

Afhankelijk van de belangstelling zal eventueel omstreeks februari een tweede middag worden belegd.
N.B. De leraren die tijdens keuzevak-wiskunde II statistiek behandelen, worden verwezen naar de cursus 2.1.

Aanmeldingsformulieren worden naar de scholen van het voortgezet onderwijs verstuurd. Ook zijn zij op telefonische aanvraag te verkrijgen bij het I.O.W.O.; tel. 030 - 611611 tst. 49.

De formulieren voor deelname moeten vóór 30 juni 1972 aan het Sekretariaat van het Instituut, Tiberdreef 4, Utrecht/Overvecht worden toegestuurd, ten name van mejuffrouw I.C. Leenstra.

De Minister van Onderwijs, Mr. C. van Veen, heeft ons gemachtigd mededeling te doen van het feit, dat hij de schoolleiding aanbeveelt wiskunde-leraren de gelegenheid te bieden één of meerdere kursussen te volgen en dat hij een daartoe eventueel benodigd buitengewoon verlof goedkeurt.

Namens het

Instituut Ontwikkeling
Wiskunde Onderwijs,

Drs. E.J. Wijdeveld
(Alg. Directeur)

VAKANTIECURSUS 1972

voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden

Het Mathematisch Centrum organiseert wederom een vakantiecursus en wel in
AMSTERDAM op woensdag 16 en donderdag 17 augustus 1972
EINDHOVEN op donderdag 17 en vrijdag 18 augustus 1972
Onderwerp: *'Grafentheorie en haar toepassingen*
De programma's zijn voor beide plaatsen dezelfde en vermelden voordrachten van
Dr. G. Laman (Univ. van Amsterdam): *'Wat zijn grafen?'*
J.M. Anthonisse (Math. Centrum): *'Optimaliseringsproblemen'*
Prof. Dr. J. de Groot (Univ. van Amsterdam): *'Gekleurde grafen als hulpmiddel bij algebra en meetkunde'*
Prof. Dr. R.J. Mokken (Univ. van Amsterdam): *'Grafentheorie en sociale wetenschappen'*
Prof. Dr. P.W. Kasteleyn (RU-Leiden): *'Grafen in de fysica'*
Plaats: Amsterdam-Mathematisch Instituut, Roetersstraat 15
Eindhoven-Groot Auditorium TH, Insulindelaan 2
Kosten: *f* 5,— inclusief uit te reiken syllabus; aanmelden schriftelijk (vóór 25 juli) bij het Secretariaat van het Math. Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O, tel. 020-947272. Lunchkosten (*f* 5,— per lunch) en cursusgeld kunnen overgemaakt worden naar postrekening 462890 t.n.v. Mathematisch Centrum, Amsterdam.

NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Contributieverhoging
De penningmeester deelt mede dat op de afgelopen jaarvergadering besloten is de contributie te verhogen tot *f* 20.- (inclusief collectief abonnement op Euclides) voor het verenigingsjaar 1972-1973. Leden kunnen nu reeds dit bedrag storten of over laten schrijven op giro 143917, t.n.v. Ned. Ver. van Wiskundeleraren, te Amsterdam. Zij die Euclides niet via de vereniging ontvangen betalen *f* 7.50.

13e Internationale post-universitaire cursussen

Deze Belgische cursussen worden van maandag 21 tot en met vrijdag 25 augustus gehouden in de Rijksuniversiteit van Luik.
Het doel is docenten van het niet-universitair onderwijs op de hoogte te houden van moderne wetenschappelijke vorderingen. Er zijn vier secties: wiskunde, natuurkunde, biologie en scheikunde.
Het programma voor wiskunde vermeldt de cursussen:

Prof. Dr. Ch. Pisot (Parijs)
La construction d'une analyse nouvelle: l'analyse P-adique

Prof. Dr. B. Rootselaar (Wageningen)
Formalisms, mathematical and non-mathematical systems

Prof. Dr. P. Henrard (Leuven)
Analyse non-standard

Prof. Dr. G. Hirsch (Brussel)
Quelques aspects de l'évolution de la Mathématique au 19e et au 20 siècles

Prof. Dr. Griffith (Southampton)
Abstraction and models in mathematics and in mathematical education

Prof. Dr. A.C. Zaanen (Leiden)
Some chapters from the functional analysis

Prof. Dr. Grégroire (Lubumbashi)
Titel niet aangegeven

Prof. Dr. Noel
Des catégories

Prof. Dr. G. Papy (Brussel)
Méthodes graphiques dans l'enseignement de la théorie des groupes

Men kan aanmeldingsformulieren en het volledige programma aanvragen bij de heer P. Mispelter, Rijksadministratief Centrum, wijk Arcade, Bur. 3065, 1010 BRUSSEL.
De kosten bedragen 100 BFrs voor de inschrijving, verder 180 BFrs per nacht voor logies en ontbijt en 60 BFrs voor elke maaltijd.
Een aantrekkelijk programma. De cursus wordt dus gaarne aanbevolen.

Boekbespreking

W.F. Reid. *Ordinary differential equations*, John Wiley and Sons. Inc., New York/London, 1970; 553 pagina's, £ 8.50

Dit zorgvuldig en goed uitgegeven boek is bestemd voor gevorderde studenten en behandelt een aantal theoretische problemen uit het gebied van de gewone differentiaalvergelijkingen. De eerste hoofdstukken hebben betrekking op existentietheorema's en op een uitbreiding van het begrip oplossing in de zin van Carathéodory.
Hierna komen stelsels differentiaalvergelijkingen, ook met een lineaire parameter, aan de orde. De kern van het boek bestaat uit een studie van stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, met randwaarde-problemen. Daarbij wordt een systematisch gebruik van variatiebeginselen, toegepast op kwadratische en hermitese functionalen, gemaakt. De klassieke theorie van Sturm voor een reële, lineaire, homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde wordt uitgebreid tot een theorie over zelf-geadjungeerde stelsels van differentiaalvergelijkingen, waarbij de fundamentele kwadratische vorm van Morse wordt toegepast. Het laatste hoofdstuk gaat over de stabiliteit en het asymptotisch gedrag van stelsels differentiaalvergelijkingen.
Het boek bevat geen discussie van numerieke oplossingsmethoden. De auteur wil hen, die op het gebied van de toegepaste wiskunde werken, stimuleren tot de bestudering van de theorie der differentiaalvergelijkingen om in concrete gevallen te kunnen nagaan, of deze theorie dan wel bijv. de theorie van integraalvergelijkingen resp. van integrodifferentiaalvergelijkingen moet worden toegepast.
Voor de lezer zijn zes appendices toegevoegd die de hoofdzaken van de lineaire algebra bevatten. Een uitgebreide bibliografie aan het einde van het boek opent de mogelijkheid tot verdere detailstudie

W.J. Claas.

N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part III:* Spectral Operators (Pure and Applied Mathematics, Volume 7, Part 3), Wiley-Interscience, New York, 1971, XIX + 668 bl., £ 15,50.

Dit is het derde deel van een groot werk over de theorie der lineaire operatoren in genormeerde ruimten, d.w.z. een uitbreiding van de "matrixtheorie" voor eindigdimensionale vektorruimten tot het geval van oneindigdimensionale vektorruimten, waarin een afstandsbegrip aanwezig is.
Een belangrijke rol spelen hierbij de ruimten met inprodukt: de ruimten van Hilbert. Met het schrijven van dit werk werd begonnen in 1948-49; het eerste deel verscheen in 1958, het tweede in 1963 en het derde in eind 1971. De nummering der hoofdstukken en bladzijden is in het gehele werk doorlopend; zo bevat dit derde deel de hoofdstukken 15 t/m 20, en de bladzijden zijn genummerd 1925 t/m 2592. Zoals de titel aangeeft, is dit deel hoofdzakelijk gewijd aan spektraaloperatoren. Dat zijn operatoren (d.w.z. lineaire afbeeldingen) in een genormeerde ruimte (niet noodzakelijk met inprodukt), die zekere overeenkomst vertonen met zelfgeadjungeerde operatoren in een ruimte van Hilbert. Hierbij valt te bedenken dat zelfgeadjungeerde operatoren in een ruimte van Hilbert de natuurlijke uitbreiding vormen van lineaire afbeeldingen met symmetrische matrix in een eindigdimensionale ruimte met inprodukt. Wij zullen hier niet ingaan op technische details; vermeld zij slechts dat in het laatste hoofdstuk (van ruim 100 bladzijden) toepassingen op differentiaalvergelijkingen aangegeven worden, en dat het boek vele verwijzingen naar verdere literatuur bevat.

A.C. Zaanen.

Dr. C.M. Geerars, *Onderwijsvernieuwing;* 129 blz., ingen. *f* 9,75, L.C.G. Malmberg, 's- Hertogenbosch, 1971.

Dr. C.M. Geerars, inspecteur in algemene dienst, speciaal belast met de coördinatie en de begeleiding van de experimenten op het gebied van het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs, het hoger algemeen onderwijs en het middelbaar algemeen voortgezet onderwijs, heeft ons in deze bundel herdrukken een uitvoerige documentatie verschaft over de huidige stand van zaken met betrekking tot het vernieuwingsstreven in binnen- en buitenland.
Voor wat het buitenland betreft staan de ervaringen in Zweden en in Amerika op de voorgrond. Naar beide landen zijn vanuit ons land tal van studiereizen ondernomen. Hoofdstuk I, mede geschreven door dr. Gathier, en hoofdstuk II van de hand van drs. Jacobs e.a. zijn geheel aan het onderwijs in Zweden gewijd. Beide bijdragen werden eerder gepubliceerd in het Weekblad van het departement van Onderwijs en Wetenschappen 'Uitleg'.
Vooral in het laatste hoofdstuk 'Veranderingsprocessen in het onderwijs' wordt uitvoerig ingegaan op de Amerikaanse experimenten; het bevat een oriëntatie op de te volgen strategieën en op de gehanteerde procesmodellen van de geplande vernieuwingen. Aspecten van de 'veranderingskunde' komen uit de verf. Dit hoofdstuk werd eerder gepubliceerd in het lerarenweekblad van 30 oktober 1970.
Verder bevat de bundel nog de volgende hoofdstukken:
(1). een herdruk van een in 1968 in 'Uitleg' verschenen artikel 'Op weg naar een nieuw onderwijs; wat hebben de experimenten ons geleerd?'
(2). de tekst van een voordracht gehouden bij de opening van de cursus 1968-1969 van de Gelderse Leergangen, getiteld: 'De toekomst van onze onderwijs; enige prognotische gedachten';
(3). de herdruk van een artikel verschenen in het lerarenweekblad van 25 april 1969, over 'Onderwijsvernieuwing; een informatie', waarin o.a. de problematiek van de programmascholen, de ervaringen aan het Roncalli College te Bergen op Zoom en de betekenis van het CITO aan de orde worden gesteld;
(4). de vertaling van een voordracht getiteld 'A blueprint for comprehensive education in the Netherlands' gehouden in 1969 op een internationale conferentie te Beekbergen onder auspiciën van het Onderwijskundig Studiecentrum; de voordracht behandelt doelstellingen, voorwaarden, alternatieve structuren en innovatie van geïntegreerd onderwijs en verscheen eerder in het maandblad' Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs' in 1970;
Alle bijdragen zijn waard gelezen en herlezen te worden. Ze bevatten waardevol documentatiemateriaal van de hand van een deskundig auteur die mede door zijn functie de aangewezen man is om bij te dragen tot een verantwoorde oriëntatie van de Nederlandse leraar inzake vernieuwingsproblemen.
Ook vernieuwingspogingen uit het verleden komen in de bundel-zij het uiteraard heel summieraan de orde. Voor hen die er prijs op stellen niet alleen geïnformeerd te worden over de problemen die verbonden zijn aan de overgang van de huidige onderwijssituatie naar een toekomstige, maar deze mede wensen te zien in historisch perspectief, wijzen we op de in 1970 verschenen bundel 'Vernieuwingsstreven binnen het Nederlandse onderwijs in de periode 1900-1940' van een team van auteurs onder redactie van dr. Van Hulst, dr. Van der Velde en dr. Verhaak (Groningen, 1970).
Overigens bevatten alle hoofdstukken behalve het tweede al uitvoerige lectuurverwijzingen die tot verdere studie prikkelen.
We wensen de bundel in vele handen.

Joh.H.Wansink

H.-J.Kowalsky. *Lineare Algebra*. 6. verbesserte Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1772, 341 blz., DM 48.--.

In de enige weken geleden aan de redactie gezonden aankondiging van Kowalsky's "Einführung in die lineare Algebra" werd al de 5-de druk van dit werk, waarvan nu dus de 6-de is verschenen, genoemd. Tot blz. 212 is de inhoud die van deze Einführung. Dan volgen nog hoofdstukken over

quotiëntenruimten, directe sommen en produkten, over normaalvormen, dualiteit en multilineaire algebra.
De opeenvolging van drukken is voldoende bewijs voor de grote bruikbaarheid. Ik heb me afgevraagd of een splitsing in twee deeltjes niet doelmatiger zou zijn geweest dan het apart doen verschijnen van de Einführung: wie na de aanschaf hiervan tòch verder wil of moet gaan heeft het begin dan niet in tweevoud.
H.W.Lenstra sr.

Sterrengids 1972. Wolters-Noordhoff N.V. Groningen, 96 blz. *f* 10.-

De inhoud en uitvoering is voldoende bekend. Naast de bekende te verwachten verschijnselen aan de sterrenhemel is onder de titel „Buiten ons melkwegstelsel" een interessante bijdrage opgenomen sterrenevels.
Goede wijn behoeft geen krans.

Burgers

Thomas L.Boullion and Patrick L.Odell, *Generalized inverse matrices.* John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1971, X + 103 pag. £ 4.75.

Dit boek is vooral van belang voor toegepast-wiskundigen als statistici. Voor de in ons voortgezet onderwijs aan de orde komende stof of voor de didactiek is het minder belangrijk, zodat wij volstaan met de aankondiging.

Van Noot.

H.-J. Kowalsky, *Einführung in die lineare Algebra.* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1971, 233 blz. D.M. 18.-.

Niet iedereen hoeft direct alles van een vak te weten en daarom is het, vooral voor beginners, prettig, dat prof.Kowalsky naast zijn veel gebruikte "Lineare Algebra", dat al zijn 5de druk beleefde (welke D.M. 48.- kost!), deze "Einführung" als een verkorte uitgave hiervan het licht deed zien. De stof is beperkt tot de belangrijkste grondbeginselen en enkele meetkundige toepassingen.
De schrijver noemt kort de nodige begrippen uit de theorie der verzamelingen, waarbij hij ook het lemma van Zorn aanstipt, definieert de groepen, ook de abelse, de lichamen en de ringen. Hierna kan de vectorruimte worden ingevoerd als samenspel van een abelse groep, een getallenlichaam en een vermenigvuldigingsoperatie, waarbij nog bij axioma een associatieve eigenschap en twee distributieve benevens de uitkomst bij vermenigvuldiging met de eenheid uit het getallenlichaam moeten worden vastgelegd, nadat is geconstateerd dat een en ander geldt bij de aanschouwelijk meetkundige betekenis die de oorsprong is van het begrip "vector".
De in een inleiding tot de lineaire algebra gebruikelijke onderwerpen komen aan de orde met veel nadruk op de afbeeldingen.
Determinanten worden gedefinieerd met behulp van multilineaire functies, die hier "*n*-fache Linearformen" heten. De gewone lineaire functie en de duale vectorruimte komen niet aan de orde, zodat ook de cobasis ontbreekt.
Aequivalentie van matrices, eigenvectoren en eigenwaarden worden kort behandeld.
Na een uitvoerige behandeling van de euclidische en unitaire vectorruimten besluit het boek met enkele meetkundige toepassingen over affine en projectieve ruimten, affine afbeeldingen, projectiviteiten, projectieve en affine hypervlakken van de 2de orde.
In een aanhangsel wordt het vectorprodukt nog gedefinieerd.
De stof is overzichtelijk ingedeeld en bondig en correct behandeld.

H.W.Lenstra sr.

H.J. Zimmermann, *Netzplantechnik*. Sammlung Göschen band 4011, Walter de Gruyter, Berlin — New York, 1971, 156 p., prijs DM 7,80.

De auteur geeft een overzicht met uitgewerkte voorbeelden van de meest bekende netwerktechnieken in de planningtheorie.
Na een beschrijving van de aanpak volgens Gantt en Fouch wordt ingegaan op de diverse aspecten van drie in 1957 en 1958 ontwikkelde technieken, waaruit in de loop der tijd een dertigtal verfijnde technieken zijn afgeleid.
Deze drie basis- methoden zijn:
1. CPM (Critical Path Method)
2. PERT (Programm Evaluation and Review Technique)
3. MPM (Metra-Potential-Method).

Vervolgens wordt het probleem besproken een planningsschema op te stellen welk de kosten van een werk minimaliseert indien de verschillende onderdelen tijd- en capaciteit gebonden zijn. Het algoritme van Ford en Fulkerson wordt behandeld. In het laatste hoofdstuk worden enkele speciale problemen aan de orde gesteld zoals multiprojectplanning en stochastische modellen.
In het aanhangsel zijn enkele computerprogramma's opgenomen.
Alles bij elkaar geeft dit boek een zeer breedvoerig overzicht van het specialistische terrein der planningtheorie.

L.C.M. Kallenberg

Prof. Dr. Lothar Jantscher, *Distributionen*. Walter de Gruyter, Berlijn & New York, 1971; 367 p.

Sinds in 1950/51 de beide delen van Laurent Schwarz over zijn "Théorie des distributions" verschenen, is deze theorie op tweeerlei wijze gaan behoren tot het standaardmateriaal van de analyse. Binnen het kader van de meer abstract georiënteerde theorie worden de diverse soorten toetsruimten en distributieruimten behandeld als belangrijke voorbeelden van locaal convexe vectorruimten (de theorie van deze ruimten is sterk door de distributietheorie gestimuleerd!); de beoefenaren van de toegepaste analyse (mathematische physica) zijn gewend geraakt distributies te gebruiken bij het oplossen van allerlei practische problemen (partiele differentiaalvergelijkingen). Het hier besproken boek lijkt bedoeld voor de practici.
De abstracte theorie wordt tot een minimum beperkt, de behandeling van de materie is bedachtzaam en voorzichtig, daarbij (en daardoor) helder en doorzichtig. De benodigde voorkennis gaat de analyse van voor het candidaatsexamen niet te boven. Een groot aantal voorbeelden verheldert het betoog, evenals een 170-tal goed gekozen vraagstukken (waarvan achterin volledige oplossingen worden gegeven).
De hoofdzaken van de meer elementaire distributietheorie komen aan de orde, zoals differentiatie, integratie, convolutie, Fourier- en Laplacetransformatie. Er is een hoofdstuk over een aantal belangrijke singuliere distributies, een hoofdstuk over periodieke distributies en Fourierreeksen, en een slot hoofdstuk over toepassingen in de theorie van de differentiaalvergelijkingen.
Specialisten zullen zich door de elementaire behandeling in dit boek (die natuurlijk ook een beperking betekent voor de stof die aan de orde kan worden gesteld) teleurgesteld voelen. Voor hen zijn er sinds de dagen van Schwartz dan ook wel andere boeken geschreven. Voor diegenen echter die weinig of niets van dit belangrijke onderdeel van de analyse afweten kan dit boek een bijzonder prettige en bruikbare inleiding betekenen. Ieder die de klassieke analyse leuk vindt, zal zich ook met plezier in dit werk kunnen verdiepen. Te meer daar de uitvoering zeer aantrekkelijk is.

P.C. Baayen.

A.H. England. *Complex variable methods in elasticity.* Wiley-Interscience, London - New York - Sydney - Toronto, 1971, 181 blz., £ 5.25.

In dit prettig geschreven boek wordt op overzichtelijke wijze een indruk gegeven van de mogelijkheden en moeilijkheden bij het gebruik van de complexe functietheorie voor het oplossen van problemen uit de vlakke elasticiteitstheorie.
Er zijn vijf hoofdstukken:
1 Functions of a complex variable
2 The basic equations of two-dimensional elasticity
3 Plane and half-plane problems
4 Regions with circular boundaries
5 Regions with curvilinear boundaries
Voor de lezer met enige kennis van de complexe functietheorie en de lineaire elasticiteitstheorie bevatten de eerste twee hoofdstukken alle noodzakelijke 'werktuigen'.
In de overige drie hoofdstukken wordt steeds eerst een klasse van problemen geformuleerd, waarna de oplossingsmethoden duidelijk worden aangegeven. De gebieden met kromlijnige grenzen uit het laatste hoofdstuk worden conform afgebeeld op door cirkels begrensde gebieden.
Mede doordat hoofdstuk 2 tot en met 4 afgesloten worden met een aantal vraagstukken, die zowel illustratie als aanvulling van de tekst zijn, vormt dit beknopte werk een goede inleiding in dit belangrijke gebied, waar het standaardwerk van N.I. Muskhelishvili 'Some basic problems of the mathematical theory of elasticity' door zijn grote omvang afschrikwekkend zou kunnen werken.

M.P. van Ouwerkerk - Dijkers

drs.J.van Dormolen, *Eenvoudige Topologie.* Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972, 208 blz., f 16,50
Dit boek is een vertaling van de in 1966 verschenen uitgave van W.G. Chinn en N.E. Steenrod 'First concepts of Topology'.
Indien men het onderwerp Topologie als keuzeonderdeel van Wiskunde-II zou overwegen, dan moet men beslist van deze uitgave kennisnemen. In het eerste deel (103 blz.) wordt de vraag beantwoord: 'Wanneer kan men de vergelijking $f(x) = y$ bij gegeven y oplossen in x?' en in het tweede deel 'Wanneer kan men het stelsel: $f(x,y) = a$ en $g(x,y) = b$ bij gegeven a en b oplossen in x en y?'
Mijn indruk bij lezing van dit werk is toch wel, dat aan de leraar bijzondere didactische kwaliteiten gesteld worden en dat men van de leerling wel bijzondere belangstelling mag verwachten. Belangrijk is echter, dat de vertaler de verschillende onderdelen duidelijk gemarkeerd heeft naar moeilijkheidsgraad en dat de antwoorden achterin de gelegenheid tot zelfstudie open laten. Aan het begrip open verzameling wordt grote aandacht besteed; deze openheid van een verzameling A wordt gedefinieerd t.o.v. een verzameling B, $A \subset B$. (Nu zijn figuren erg verleidelijk.) Zo wordt op blz. 42 zonder motivering aangenomen dat $N(x_0, r_0, X)$ een punt x bevat dat niet met x_0 samenvalt (op blz. 43 eerste regel is een minteken weggevallen) en in de definitie van geslotenheid is ook tweemaal 'in X' weggevallen. Het zou nuttig en nodig zijn deze definities nog met wat rare voorbeelden nader te illustreren.
Minder gelukkig ben ik met (blz. 58) het zonder motivering invoeren van een getal(?)

$$c = m + \frac{k_1}{10} + \ . \ . \ . + \frac{k_n}{10^n} + \ . \ . \ .$$

Het gaat er immers juist om de existentie van een zodanig getal aan te tonen.
Met bijzondere interesse zal ik de resultaten van een experiment met deze stof tegemoet zien.

Burgers

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek

278 Men mag de volgende twee bewerkingen uitvoeren: vermeerderen met 7 en delen door 3. Gevraagd door middel van een minimaal aantal van deze bewerkingen in $\mathbb{N}$ uitgaande van het getal 13 het getal 14 te bereiken.
En daarna algemeen: uitgaande van het getal a het getal b te bereiken. Kies b.v. $a = 226$, $b = 117$.

279 Lewis Caroll stelt in zijn Pillow Problems de volgende vraag (gedateerd 1887). Mijn vriend brengt mij een zak met vier knikkers, waarvan elk wit of blauw is. Hij vraagt mij er twee te trekken; deze blijken allebei wit te zijn. Daarna zegt hij: 'Ik was van plan je van te voren te zeggen, dat er minstens één witte knikker in de zak was. Maar nu weet je het al, zonder dat ik het je gezegd heb. Trek nog een knikker.' Wat is nu de kans, dat deze knikker wit is.
1e als je bovenstaande mededeling in aanmerking neemt (dus de mededeling, dat er minstens één witte knikker in de zak is),
2e als je deze mededeling als niet gedaan beschouwt?
De vraag doet enigszins wonderlijk aan. Nog wonderlijker is echter, dat Lewis Caroll kans ziet twee verschillende antwoorden te vinden. Hij redeneert als volgt.
1e Omdat bekend is, dat er ten minste één witte knikker in de zak is, zijn er alleen de volgende mogelijkheden: WWWW, WWWB, WWBB, WBBB. De kansen a priori hierop zijn resp. $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$.

In de vier genoemde gevallen is de kans op het trekken van twee witte knikkers resp. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0$.

De kansen a posteriori op de vier mogelijkheden verhouden zich dus als $\frac{1}{8} \cdot 1, \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}, \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6}, 0$, d.i. als 2, 3, 1, 0. Deze kansen zijn dus $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0$.

De kans op het trekken van een derde witte knikker is dus $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$.

2e De kansen a priori op WWWW, WWWB, WWBB, WBBB, BBBB zijn resp. $\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$.

In de vijf genoemde gevallen is de kans op het trekken van twee witte knikkers resp. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, 0$.

De kansen a posteriori op de vijf mogelijkheden verhouden zich dus als $\frac{1}{16} \cdot 1, \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8}, 0, 0$.
Ze zijn dus gelijk aan $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0$.
De kans op het trekken van een derde witte knikker is dus $\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Hoe is het te verklaren, dat er twee verschillende antwoorden komen?

OPLOSSINGEN

276 In de figuur 1 zijn op het schaakbord de getallen 1 — 25 zo ingevuld, dat het minimum verschil tussen de getallen op twee aangrenzende velden zo klein mogelijk is. Onder aangrenzende velden wordt hier verstaan velden, die een zijde gemeen hebben. Het minimum verschil bedraagt hier 10.
In de figuur 2 wordt onder aangrenzende velden verstaan velden, die een zijde of een hoekpunt gemeen hebben. Het minimum verschil bedraagt hier 5.
Blijft over te bewijzen, dat in het eerste geval het onmogelijk is de cijfers zo te plaatsen, dat het minimum verschil 11 is. En in het tweede geval zo, dat het minimum verschil 6 is.
Eerste geval. Onderstel het minimum verschil is 11. Dan worden de getallen 15, 16, 17 geheel omsloten door 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Dit is op diverse manieren mogelijk. Nu voegen we het getal 18 toe. Dan worden 14 — 18 geheel omsloten door 1 — 7.
Toevoeging van één getal links geeft toevoeging van ook slechts één getal rechts. We gaan zo verder.

1	14	3	15	5
16	2	17	4	18
6	19	7	20	8
21	9	22	10	23
11	24	12	25	13

fig. 1

19	1	20	2	21
14	9	15	10	16
3	22	4	23	5
11	17	12	18	13
6	24	7	25	8

fig. 2

Bij de volgende stap worden 14 — 19 geheel omsloten door 1 — 8. Enz.
Gaat men de mogelijkheden na, dan ziet men in, dat men gedwongen wordt een weg te volgen, zoals in figuur 3 is weergegeven. Tot en met 25 gaat alles dan goed. Maar het blijkt niet meer mogelijk het dan nog ontbrekende getal 14 een passende plaats te geven.

1	15	3	17	6
18	2	16	5	20
7	19	4		9
	8			

fig. 3

	a		b	
		m		
	d		c	

fig. 4

Nu het tweede geval. Onderstel, dat het minimale verschil 6 is. We concentreren ons voorlopig op de getallen op de plaatsen a, b, c, d, m.
Als b.v. $a = 1$ en $b = 8$, dan ziet men spoedig, dat het niet mogelijk is de getallen 3, 4, 5, 6 een passende plaats te geven. Als $a=1$ en $b=9$ lukt het nog wel de getallen 2-7, 10 en 11 te plaatsen, maar dan loopt men vast. Waaruit volgt:

$$|a-b| \geqslant 9, \; |b-c| \geqslant 9, \; |c-d| \geqslant 9, \; |d-a| \geqslant 9.$$

Kies nu $m = 1$. Dan lukt het niet meer a, b, c, d zo te kiezen, dat aan de voorwaarden voldaan is.
De eerstvolgende mogelijkheid, die voor m in aanmerking komt, is 7. Dan zouden we kunnen kiezen $a = 1$, $b = 13$, $c = 23$, $d = 14$. De getallen 9 — 12 en 15 — 18 zouden dan moeten komen op de 6 nog beschikbare plaatsen in de linker bovenhoek en de rechter onderhoek. Hetgeen niet kan. We zouden voor d ook 15 of 16 kunnen kiezen (want voor c kunnen we nog 24 of 25 nemen).
Neem b.v. $b = 13$ en $d = 16$. Nu lukt het niet de getallen 11, 12, 14, 15, 17, 18 een plaats te geven. Ook deze zes getallen kunnen immers alleen maar geplaatst worden op de drie vakken linksboven en de drie vakken rechtsonder. En daar zullen ze onderling verschillen minder dan 6 tussen getallen in aangrenzende vakken leveren. Analoog lukt $d = 15$ niet.
Grotere waarden van m geven dezelfde moeilijkheden. En dus is 5 het grootste minimale verschil, dat realiseerbaar is.

277 Gevraagd wordt de natuurlijke getallen a, b en c zo te bepalen, dat $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ en $b - a = k$

en bovendien a, b en c geen gemeenschappelijke factor hebben. Voor welke waarden van k vindt men een oplossing?
De eerste eis is gelijkwaardig met

$$c\,(b - a) = ab.$$

Elke priemfactor van $b - a$ moet blijkbaar een factor van a of van b zijn.
Is een factor van $b - a$ tevens een factor van a, dan is hij ook een factor van b, en is hij een factor van b, dan is hij ook een factor van a.
Onderstel, dat $b - a$ b.v. de factor 5 bevat. Dan zijn dus a en b deelbaar door 5. Omdat de g.g.d. van a, b en c gelijk aan 1 is, is c niet deelbaar door 5. En dus is $b - a$ deelbaar door 5^2.
Onderstel, dat $b - a$ deelbaar is door 5^3. Dan zijn a en b deelbaar door 5. Als ze niet deelbaar door 5^2 zijn, is c deelbaar door 5, hetgeen niet het geval mag zijn. Dus zijn ze beide deelbaar door 5^2 en is $b - a$ deelbaar door 5^4.
Gevolg: $b - a$ is een produkt van evenmachten van priemfactoren en is dus een kwadraat.
Onderstel nu, dat gegeven is $b - a = k^2$ Dan moet a deelbaar zijn door k. Er moet dus een p zijn z.o. dat $a = pk$. Waaruit volgt $b = pk + k^2$.
Uit

$$ck^2 = pk\,(pk + k^2)$$

blijkt dan, dat

$$c = p\,(p + k)$$

moet zijn. Kies nu p z.o. dat p geen factor met k gemeen heeft. Dan voldoen aan de vraag

$$a = pk,\ b = pk + k^2,\ c = p\,(p + k).$$

Didactische Literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Elemente der Mathematik, XXV5 — XXVI4, september 1970 — juli 1971

F. Hohenberg, Die Hexaeder und Tetraeder im Dodekaeder;
G. Chartrand en A.T. White, Randomly transversable graphs;
F. Fricker, Über hebbare Unstetigkeiten;
E. Vegh, A new condition for consecutive primitive roots of a prime;
D. Suryanarayana, A property of the unitary analogue of Ramanujan's sum.

P. Erdös en R.K. Guy, Distinct distances between lattice points;
H.C. Williams, Note on a diophantine equation;
E. Schröder, Zur lokalen Approximation einer Raumkurve;
M.S. Klamkin en D.J. Newman, Uniqueness theorems for power equations;
H. Irminger, Zu einem Satz über räumliche Fünfecke;
R.W. van der Waall, On a theorem of Burnside.

D. Kijne, Die algebraische Deutung der Hilbert'schen geometrischen Konstruktionen mittels Lineals und Eichmasses;
T. Bundschuh, Zwei Resultate über Trigonalzahlen.

H. Ziegler, Zum axiomatischen Aufbau der Mechanik;
W. Böhm, Die projektiven Abbildungen auf einer Geraden;
D. Suryanarayana, Semi-k-free integers;
T. Salát, Bemerkung zu einer Anwendung des Bertrandschen Postulat in der Zahlentheorie;
E. Wittmann, Über verschwindende Summen von Einheitswurzeln.

H. Hadwiger en R. Schneider, Vektorielle Integralgeometrie;
L. Fejes Tóth, Über Scheiben mit richtungsinvarianter Packungsdichte;
E. Trost, Eine Bemerkung zur Diophantischen Analysis.

W. Wunderlich, Starre, wackelige und bewegliche Gelenkvierecke im Raum;
P. Clahsen, Transformationen von Polyedern in Polyederketten;
J. Binz en P. Wilker, Mathematische Problemwettbewerbe 1969-1970 im Kanton Bern

INHOUD